DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

Канетова Д.Э.

БИР КАЛЫПТУУ μ-КОМПАКТУУ МЕЙКИНДИКТЕР

Канетова Д.Э.

РАВНОМЕРНО μ-КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

D. Kanetova

UNIFORMLY μ-COMPACT SPACES

УДК: 515.12

Санактуу компактуу мейкиндиктерди 1906-жылы Фреше киргизген. Алар компактуу мейкиндиктерден мурда аныкталып жана изилденген. Метризацияланган мейкиндиктердин классы үчүн эки аныктама – компактуулук жана санактуу компактуулук түшүнүктөр тең күчтүү. Ал мезгилдерде санактуу компактуу мейкиндиктер компактуу мейкиндиктер, ал эми биз айтып жүргөн компактар бикомпактар деп айтылган. Компактардын санактуу компактардан негизги айырмачылыгы Тихоновдун теоремасы боюнча алардын мультипликативдүүлүгүндө, ошол эле убакта санактуу компактар чектүү мультипликативдүү дагы болушпайт. Санактуу компактуу мейкиндиктердин классынын жалпыланышы болуп μ - компактуу мейкиндиктердин классы б.а. кубаттуулугу ≤ μ болгон ар бир ачык жабдууга чектүү ачык жабдууну ичтен сызууга мүмкүн болгон топологиялык мейкиндиктердин классы саналат. Бул макалада μ -компактуу мейкиндиктердин бир калыптуу аналогдору, тактап айтканда бир калыптуу μ -компактуу бир калыптуу мейкиндиктер киргизилип изилденет. Бир калыптуу $\aleph_0$ - компактуу бир калыптуу мейкиндиктер бир калыптуу санактуу компактуу, ал эми $\aleph_0$ - компактуу топологиялык мейкиндиктер – санактуу компактуу деп аталат.

Негизги сөздөр: *μ - компактуу мейкиндик, бир калыптуу μ - компактуу мейкиндик, ≤ μ кубатуулуктагы чектүү аддитивдүү ачык жабдуу, бир калыптуу санактуу компактуу мейкиндик.*

Счетно компактные пространства были введены Фреше в 1906 году. Они были определены и изучались раньше компактных пространств. Для класса метризуемых пространств оба определения равносильны. В те времена счетно компактные пространства именовались компактными пространствами, а наши компакты назывались бикомпактами. Основная причина превосходства компактов над счетно компактами – в том, что компактность мультипликативна согласно теореме Тихонова, в то время как счетная компактность даже не конечно мультипликативна. Обобщениями класса счетно компактных пространств являются класс μ - компактных пространств т.е. те топологические пространства, в каждые их открытых покрытий мощности ≤ μможно вписать конечные открытые покрытия. В данной статье изучаются равномерные аналоги μ - компактных пространств, а именно равномерно μ - компактные равномерные пространства. Равномерно $\aleph_0$ - компактные равномерные пространства называются равномерно счетно компактными, а $\aleph_0$ - компактные топологические пространства – счетно компактными.

Ключевые слова: *μ -компактное пространство, равномерно μ -компактное пространство, конечно аддитивное открытое покрытие мощности ≤ μ, равномерно счетно компактное пространство.*

Countably compact spaces were introduced by Frechet in 1906. They were defined and studied before compact spaces. For the class of metrizable spaces, both definitions are equivalent. In those days, countably compact spaces, and our compacta were called bicompact spaces. The main reason for the superiority of compacts over countably compacts is that compactness is multiplicative according to Tychonoff's theorem, while countable compactness is not even finitely multiplicative. Generalizations of the class of countably compact spaces are the class of μ -compact spaces, i.e. those topological spaces in every open covering cardinality ≤ μ can be inscribe finite open covering. In this article, we study uniform analogues of μ -compact space, namely uniformly μ -compact uniform spaces. Uniformly $\aleph_0$-compact uniform spaces are called uniformly countably compact, and $\aleph_0$-compact topological spaces are called countably compact.

Key words: *μ - compact topological space, uniformly μ -compact uniform space, finitely additive open covering cardinality ≤ μ, uniformly countably compact space.*

В начале напомним некоторые известные понятия и утверждения из общей и равномерной топологии. Пусть α является покрытием множества X. Подсемейство $\alpha_0 \subset \alpha$ называется подпокрытием, если оно само является покрытием множества X. Выберем два покрытия α и β множества X. Тогда покрытие $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$ называется структурным пересечением α и β, и обозначается через $\alpha \wedge \beta$. Рассмотрим покрытие α множества X и $M \subset X$ - подмножество. Множество $\alpha(M) = \cup St(\alpha, M)$, где $St(\alpha, M) = \{A \in \alpha : A \cap M \neq \varnothing\}$, есть звезда M относительно α. В случае $M = \{x\}$, звезду $\alpha(\{x\})$ пишут $\alpha(x)$. Говорят, что α вписано в β, если для каждого $A \in \alpha$ найдется $B \in \beta$ такое, что $A \subset B$ и обозначается $\alpha \succ \beta$, говорят, что α звездно вписано в β, если для любого $x \in X$ найдется $B \in \beta$ такое, что $\alpha(x) \subset B$ и обозначается $\alpha \rhd \beta$, говорят, что α сильно звездно вписано в β, если для всякого $A \in \alpha$ найдется $B \in \beta$ такое, что $\alpha(A) \subset B$ и обозначается $\alpha* \succ \beta$ [2], [3].

Последовательность $\{\alpha_n : n \in N\}$ покрытий множества X называется нормальной последовательнос-

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

тью, если $\alpha_{n+1} * \succ \alpha_n$, $n \in N$ [2].

Говорят, что покрытие α множества X называется τ -звездной (сильно τ -звездной), если $|St(\alpha, x)| \le \tau$, $x \in X$ ($|St(\alpha, A)| \le \tau$, $A \in \alpha$), $St(\alpha, x) = \{A \in \alpha : A \ni x\}$ ($St(\alpha, A) = \{A' \in \alpha : A \cap A' \ne \varnothing\}$) [3].

Семейство U покрытий множества X называется равномерной структурой на X, если выполнены аксиомы: (P1) если $\alpha \in U$ и $\alpha \succ \beta$, то $\beta \in U$; (P2) для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in U$ существует $\alpha \in U$, которое вписано и в α_1 и в α_2; (P3) для каждого $\alpha \in U$ найдется такое $\beta \in U$, что $\beta * \succ \alpha$; (P4) для любых x, y таких $x \ne y$ точек X существует такое $\alpha \in U$, что ни один член α не содержит одновременно x и y. Пара (X, U), состоящая из множества X и равномерностью U называется равномерным пространством. Семейство $B \subset U$ называется базой равномерности U, если для каждого $\alpha \in U$ найдется $\beta \in B$ такое, что $\beta \succ \alpha$ [2].

Пусть $f : X \to Y$ - отображение множества X в множество Y. Если α и β - покрытия множества X и Y соответственно, то $f(\alpha) = \{f(A) : A \in \alpha\}$ и $f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(B) : B \in \beta\}$ являются покрытиями множества Y и X соответственно. Отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ пространства (X, U) в пространство (Y, V) называется равномерно непрерывным отображением, если для каждого $\beta \in V$ найдется $\alpha \in U$ такое, что $f\alpha \succ \beta$. Равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ пространства (X, U) на пространство (Y, V) называется предкомпактным, если для каждого $\beta \in V$ найдутся $\beta \in V$ и конечное покрытие $\gamma \in U$ такие, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y называется совершенным, если прообраз $f^{-1}y$ компактен для любого $y \in Y$ и замкнуто, отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ пространства (X, U) в пространство (Y, V) называется равномерно совершенным, если оно одновременно предкомпактно и совершенно [2]. Отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется ω -отображением, если каждая $y \in Y$ обладает такая окрестность O_y, что $f^{-1}O_y \subset W$ для некоторого $W \in \omega$ [3]. Пространство X называется μ -компактным, если для каждого открытого покрытия α мощности $\le \mu$ можно вписать конечное открытое покрытие β [1].

Следующая лемма послужит естественной основой понятия равномерного аналога μ -компактного пространства.

Лемма 1. (X, τ) μ -компактно в том и только том случае, если в любое конечно аддитивное открытое покрытие α мощности $\le \mu$ можно вписать конечное открытое покрытие β.

Доказательство. Выберем α открытое покрытие (X, τ) мощности $\le \mu$. Образуем всевозможные конечные объединения элементов этого покрытия. Полученное открытое покрытие $\alpha^{\angle}$ естественно конечно аддитивное открытое, которое имеет мощность $\le \mu$. В него впишем конечное открытое покрытие β. Для каждого номера $j \in N$ найдется такое $A_{B_j} \in \alpha^{\angle}$, что $B_j \subset A_{B_j}$, $A_{B_j} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \alpha$, $i = 1,2,...,n$. Пусть $\alpha_0 = \cup\{\alpha_{B_j} : j \in N\}$, $\alpha_{B_j} = \{B_j \cap A_i : i = 1,2,...,n, j \in N\}$. Тогда α_0 является конечным покрытием (X, τ) и $\alpha_0 \succ \alpha$. Значит, (X, τ) μ -компактно. Обратное очевидно.

Определение 1. (X, U) назавем равномерно μ -компактным, если в любое конечно аддитивное открытое покрытие α можно вписать конечное $\beta \in U$ мощности $\le \mu$.

Равномерно $\aleph_0$ -компактные пространства называются равномерно счетно компактными.

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

Предложение 1. Пусть (X,U) - равномерно μ-компактное, тогда тихоновское пространство (X,τ_U) является μ-компактным, обратно, если (X,τ) - μ-компактно, то (X,U_X) с универсальной структурой U_X есть равномерно μ-компактное пространство.

Доказательство. В пространстве (X,τ_U) рассмотрим открытое покрытие α мощности $\leq \mu$. Тогда для $\alpha^{\angle}$ пространства (X,U) мощности $\leq \mu$ существует вписанное в него конечное покрытие $\beta \in U$. Т.к. $\langle\beta\rangle$ - внутренность β является равномерным, то покрытие $\gamma = \langle\beta\rangle$ является открытым покрытием пространства (X,U). Для любого $\Gamma \in \gamma$ укажем $A_\Gamma \in \alpha^{\angle}$ $\Gamma \subset A_\Gamma$, где $A_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \alpha$, $i = 1,2,...,n$. Пусть $\alpha_0 = \cup\{\alpha_\Gamma : \Gamma \in \gamma\}$, $\alpha_\Gamma = \{\Gamma \cap A_i : i = 1,2,...,n\}$. Отсюда следует, что α_0 является открытым конечным покрытием (X,τ_U), которое вписано в α мощности $\leq \mu$, следовательно, (X,τ_U) μ-компактно.

Теперь, пусть (X,τ) - μ-компактно. Множество всех открытых покрытий является базой для структуры U_X пространства (X,τ). Тогда (X,U_X) - равномерно μ-компактно.

Следствие 1. Если (X,U) - равномерно счетно компактное, то тихоновское пространство (X,τ_U) будет счетно компактным, обратно, если (X,τ) - счетно компактно, то (X,U_X) с универсальной структурой U_X будет равномерно счетно компактным.

Пространство (X,U) называется компактным, если в каждое конечно аддитивное открытое покрытие α можно вписать конечное равномерное покрытие β.

Теорема 1. Всякий компакт является равномерно μ-компактным пространством.

Доказательство. Пусть пространство (X,U) компактно и α - конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда в силу компактности пространства (X,U) существует конечное равномерное покрытие вписанное в α.

Следствие 2. Всякий компакт является равномерно счетно компактным равномерным пространством.

Следствие 3. Всякое компактное тихоновское пространство является μ- компактным.

Следствие 4. Всякое компактное тихоновское пространство является счетно компактным.

Предложение 2. Всякое замкнутое подпространство M равномерно μ- компактного пространства (X,U) равномерно μ-компактно.

Доказательство. Выберем в подпространстве M некоторое конечно аддитивное открытое покрытие γ мощности $\leq \mu$. Через $\hat{\gamma}$ обозначим открытое покрытие (X,U), состоящее из γ а также $X \setminus M$. То, что $\hat{\gamma}$ есть конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq \mu$ очевидно. Найдется конечное покрытие $\beta \in U$, которое вписано в $\hat{\gamma}$. Пусть $\beta_M = \beta \wedge \{M\}$. Тогда легко видеть то, что $\beta_M \in U_M$, т.е. последнее есть равномерное покрытие M которое вписано в γ. Ясно, что $\beta_M \in U_M$ конечное, следовательно, подпространство M равномерно μ-компактно.

Следствие 5. Любое замкнутое подпространство M равномерно счетно компактного пространства (X,U) равномерно счетно компактно.

Предложение 3. Сумма любого счетного семейства равномерно μ-компактных пространств равномерно μ-компактно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное семейство $\{(X_n,U_n) : n \in N\}$ равномерно μ- компактных пространств (X_n,U_n) и их сумму а $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$. Выберем в $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$ некоторое конечно аддитивное открытое покрытие α мощности $\leq \mu$. Система $\beta = \{X_n \cap A : n \in N, A \in \alpha\}$ будет конечно адди-

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

тивным открытым покрытием мощности $\leq \mu$ для $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$ которая вписано в α. Пусть для любого $n_0 \in N$, $\beta_{n_0} = \{X_{n_0} \cap A : n_0 \in N, A \in \alpha\}$. Последнее является конечно аддитивным открытым покрытием мощности $\leq \mu$ для (X_{n_0}, U_{n_0}), и потому найдется $\gamma_{n_0} \in U_{n_0}$ мощности $\leq \mu$, которое вписано в β_{a_0}. Рассмотрим систему γ, являющаяся счетным объединением всех систем γ_a, $a \in M$, поэтому $\gamma \in \coprod_{a\in M} U_a$ т.е. точнее, оно является равномерным покрытием мощности $\leq \mu$ для $(\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_a)$ вписанным в α.

Следствие 6. Сумма любого счетного семейства равномерно счетно компактных пространств равномерно счетно компактно.

Следующая теорема показывает, что равномерно μ-компактность сохраняется в прообразе относительно равномерно совершенного отображения.

Теорема 2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно совершенное отображение. Если (Y,V) равномерно μ-компактно, то и (X,U) равномерно μ-компактно.

Доказательство. Берем конечно аддитивное открытое покрытие α мощности $\leq \mu$ (X,U) произвольным образом. Тогда покрытие $\{f^{-1}y : y \in Y\}$ вписано в α. Пусть $\beta = f^{\#}\alpha = \{f^{\#}A : A \in \alpha\}$, где $f^{\#}A = Y \setminus f(X \setminus A)$ и оно является открытым покрытием для (Y,V). Построим открытое покрытие $\beta^{\angle}$. рассматривая всевозможные конечные объединения элементов из β. Оно является конечно аддитивным открытым покрытием мощности $\leq \mu$. Согласно условие теоремы в $\beta^{\angle}$ впишем конечное покрытие $\gamma \in V$. Во-первых покрытие $f^{-1}\beta^{\angle}$ вписано в покрытие α, во-вторых $f^{-1}\gamma$ - конечное равномерное покрытие (X,U), вписанное в α, т.е. (X,U) равномерно μ-компактно.

Следствие 7. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно совершенное отображение. Если (Y,V) равномерно счетно компактно, то и (X,U) равномерно счетно компактно.

Предложение 4. Произведение равномерно μ-компактного пространства (X,U) на компактное пространство (Y,V) является равномерно μ-компактным.

Доказательство. Пусть (X,U) - равномерно μ-компактное, а (Y,V) - компактное пространство. Отображение $\pi_X:(X,U)\times(Y,V)\to(X,U)$ равномерно совершенна. Тогда π_X является ω-отображением пространства $(X,U)\times(Y,V)$ на равномерно μ-компакт (Y,V) для любого аддитивного покрытия мощности $\leq \mu$ ω $(X,U)\times(Y,V)$, поэтому, $(X,U)\times(Y,V)$ является равномерно μ-компактным.

Следствие 8. Произведение равномерно счетно компактного пространства (X,U) на компактное пространство (Y,V) является равномерно счетно компактным.

Равномерное пространство (X,U) называется индекс компактности $\leq \mu$ пространством, если в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq \mu$ можно вписать конечное равномерное покрытие.

Индекс компактности $\leq \aleph_0$ пространства называются просто равномерно финально компактными пространствами.

Из известного факта, которое утверждает, о том, что топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно финально компактно и компактно следует следующая

Теорема 3. Равномерное пространство (X,U) является компактным тогда и только тогда, когда оно имеет индекс компактности $\leq \mu$ и равномерно μ-компактно.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Докажем, что (X,U) компактно. Пусть α - некоторое конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq \mu$. В силу индекс компактности $\leq \mu$ пространства (X,U) существует открытое равно-

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

мерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \mu$ вписанное в него. В силу равномерно μ-компактности (X,U) существует такое конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$, что $\gamma \succ \beta^{\angle}$. Тогда $\gamma \succ \beta^{\angle} \succ \alpha$ т.е. $\gamma \succ \alpha$. Следовательно, (X,U) компактно.

Следствие 9. (X,U) компактно в том и только том случае, если оно равномерно финально компактно и равномерно счетно компактно.

Следствие 10. Топологическое пространство (X,τ) компактно в том и только том случае, если оно является индекс компактности $\leq \mu$ пространством и μ-компактным.

Следствие 11. Топологическое пространство (X,τ) компактно, в том и только том случае, если оно финально компактно и счетно компактно.

Литература:

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1974. – 424 с.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.
3. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек: КНУ им. Ж.Баласагына, 2013.
4. Канетова Д.Э. О μ-полноте топологических групп / Известия вузов Кыргызстана. – № 6. – 2017. – С. 11-14.
5. Канетова Д.Э. О полноте равномерных пространств / Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. – Спец. вып. – 2019. – С. 23-27.
6. Канетов Б.Э. О равномерно паракомпактных отображениях / Наука и новые технологии. - Бишкек, 2006. - № 4. - С. 12-16.
7. Канетов Б.Э. О μ - полноте равномерных пространств. // Наука и новые технологии. - 2010. - № 9. - С. 3-7.
8. Канетов Б.Э. О μ - полноте равномерно непрерывных отображений // Наука и новые технологии. - Бишкек, 2010. - № 9. - С. 16-19.
9. Канетов Б.Э. О равномерно линделёфовых пространствах // Наука и новые технологии. - Бишкек, 2011. - № 8. - С.3-8.
10. Канетов Б.Э., Канетова Д.Э. Характеризация некоторых свойств тихоновских пространств // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. – № 4 (96). – 2018. – С. 23-27.
11. Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А. О сильно равномерно B - паракомпактных пространствах // Известия вузов Кыргызстана. – 2017. – №6. – С. 6-10.
12. Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А. Равномерно линделёфовы пространства // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 7. – С. 27-33.
13. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. Bishkek, Ilim, 2021.
14. Isbell J. Uniform space, Providence, 1964.
15. Engelking R. General Topology, Berlin: Heldermann, 1989.
16. Kanetov B., Kanetova D. Characterization of some types of compactness and a construction of index compactness $\leq \tau$ extensions by means of uniform structures. AIP Cof. Proc. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020023.
17. Kanetov B.E., Baigazieva N.A., Altybaev N.I. About uniformly μ-paracompact spaces, International J. of Appl. Math. – 2021. Vol. 34. – P. 353-362.
18. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M. Paracompact-type mappings, Bull. of the Karaganda Univ. – 2021. – Vol. 2. P. 62-66.
19. Kanetov B., Baigazieva N. Strong uniform paracompactness, AIP Conference Proc. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020085.
20. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M. On a uniform analogue of paracompact spaces, AIP Conference Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030009.
21. Kanetov B.E., Kanetova D.E., Altybaev N.I. On countably uniformly paracompact spaces, AIP Conference Proc. – 2020. – Vol. 2334. – P. 020011.
22. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M., Almazbekova B.A. About weakly uniformly paracompact spaces, AIP Conference Proc. – 2022. – Vol. 2483. – P. 020004.
23. Kanetov B.E., Saktanov U.A., Kanetova D.E. Some remainders properties of uniform spaces and uniformly continuous mappings, AIP Conference Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030011.
24. Kanetov B.E, Kanetova D.E., Zhanakunova M.O. On some completeness properties of uniform spaces, AIP Conference Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030010.