МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2022.46.43.001

Абдумиталип уулу К.

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ОПЕРАТОРДУ КАРМАГАН ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

Абдумиталип уулу К.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Abdumitalip uulu K.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH-ORDER EQUATION WITH A PARABOLIC-HYPERBOLIC OPERATOR

УДК: 517.956.6

Аралаш парабола-гиперболалык оператор менен экинчи тартиптеги x боюнча дифференциалдык оператордун көбөйтүндүсүн кармаган эки өлчөмдүү областтагы төртүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Тартибин төмөндөтүү методун колдонуу менен маселе экинчи тартиптеги кичине мүчөлөрү бар өзгөрүү сызыгы $y = 0$ болгон аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн Трикоми маселесине келтирилет. Коэффициенттери өзгөрмө болгон экинчи тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн Риман функциясы методун жана экинчи тартиптеги кичине мүчөсү бар параболалык теңдеме үчүн Грин функциясы методун колдонуу менен маселе Фредгольмдун экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинген жана анын чечиминин жашашы удаалаш жакындаштыруу методу менен аныкталган. $y = 0$ сызыгындагы функциянын изи жана y боюнча туундусу аныкталгандан кийин, маселенин чечилиши D_2 областында $x = -y$ сызыгындагы баштапкы берилгендер боюнча, ал эми D_1 областында $x = 0$ сызыгындагы баштапкы берилгендер боюнча Кошинин маселелерин чечүүгө алып келтирилет. Каралып жаткан Трикоми маселесинин чечилишинин жетиштүү шарттары келтирилген.

Негизги сөздөр: *чек аралык маселелер, парабола-гиперболалык оператор, жашашы, жалгыздыгы, Римандын функциясы, Гриндин функциясы, төртүнчү даражадагы теңдеме, экинчи түрдөгү Фредгольм теңдемеси, удаалаш жакындатуу методу, Трикоми маселеси.*

Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения четвертого порядка в двумерной области, содержащий произведение смешанного параболо-гиперболического оператора и дифференциального оператора второго порядка по x. Методом понижения порядка задача сводится к задаче Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами при младших членах с линией изменения типа $y = 0$. Используя метод функции Римана для гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и метод функции Грина для параболического уравнения второго порядка с младшим членом задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого установлено методом последовательных приближений. После определения следа искомой функции и её производную по y, решение задачи сводится к задаче Коши с начальными данными в области D_2 при $x = -y$, а в области D_1 – при $x = 0$. Приведены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи Трикоми.

Ключевые слова: *краевые задачи, параболо-гиперболический оператор, единственность, существование, функция Римана, функция Грина, уравнение четвертого порядка, уравнение Фредгольма второго рода, метод последовательных приближений, задача Трикоми.*

The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a fourth-order equation in a two-dimensional domain containing the product of a mixed parabolic-hyperbolic operator and a second-order differential operator in x are proved. Using the order reduction method, the problem is reduced to the Tricomi problem for a second-order mixed parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients at lower terms with a line of change of type $y = 0$. Using the Riemann function method for a second-order hyperbolic equation with variable coefficients and the Green's function method for a second-order parabolic equation with a minor term, the problem is reduced to solving a Fredholm integral equation of the second kind, the solvability of which is established by the method of successive approximations. After determining the trace of the desired function and its derivative with respect to y, the solution of the problem is reduced to the Cauchy problem with initial data in the region D_2 at $x = -y$, and in the region D_1 - at $x = 0$. Sufficient conditions for the solvability of the Tricomi problem under consideration are given.

Key words: *boundary value problems, parabolic-hyperbolic operator, uniqueness, existence, Riemann function, Green function, fourth-order equation, Fredholm equation of the second kind, method of successive approximations, Tricomi problem.*

1. Постановка задачи. В области D, ограниченная отрезками линий $AC: x+y=0,\ CB: x-y=\ell(\ell>0),\ BB_0: x=\ell,\ B_0A_0: y=h\,(h>0),\ A_0A: x=0$ (Рисунок 1) рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} L_{11} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y), y>0, \\ L_{12} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), y<0, \end{cases}, \quad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Пусть $D_1 = D \cap (y>0), D_2 = D \cap (y<0)$, а C^{n+m} – означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}(r=0,1,...,n; s=0,1,...,m)$ [1].

Отметим, что уравнение (1) в области D_1 записывается в виде

$$L_{11}L_2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (x,y)\in D_1 \tag{2}$$

и имеет четырехкратную действительную характеристику $y = const$, а в области D_2 примет вид

$$L_{12}L_2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (x,y)\in D_2 \tag{3}$$

и имеет двукратную характеристику $y = const$ и две различные характеристики $x+y=const,\ x-y=const$ [2].

Для уравнения (1) в области D рассматривается следующая

Задача 1 (Трикоми). Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса $u, u_x, u_{xx} \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap \left[C^{2+1}(D_1) \cup C^{2+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющая в области $D \setminus (y=0)$ уравнению (1) и следующим условиям:

$$u\big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ u_x\big|_{x=0} = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{4}$$

$$u_{xx}\big|_{x=0} = \varphi_3(y),\ u_{xx}\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y),\ 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$u\big|_{x=-y} = \psi_1(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{6}$$

$$u_x\big|_{x=-y} = \psi_2(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{7}$$

$$u_{xx}\big|_{x=-y} = \psi_3(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{8}$$

где $a_2(x,y), b_2(x,y), c_i(x,y)(i=1,2),\ \varphi_i(y)(i=\overline{1,4}), \psi_j(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} &a_2(x,y), a_{2x}(x,y), b_2(x,y), b_{2y}(x,y), c_2(x,y) \in C(D_2) \\ &c_1(x,y) \in C(D_1) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^2[0,h], \varphi_3(y), \varphi_4(y) \in C[0,h], \\ &\psi_i(y) \in C^2\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right](i=1,2), \psi_3(y) \in C^4\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right]; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0),\ \varphi_2(0) = \psi_2(0),\ \varphi_3(0) = \psi_3(0). \tag{11}$$

Краевые задачи для уравнения

$$L_2 L_1 u = 0$$

изучены в работах [3, 4].

Из постановки задачи 1 вытекают следующие условия склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), 0 \le x \le \ell, \quad (12)$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell, \quad (13)$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Для решения задачи 1, рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

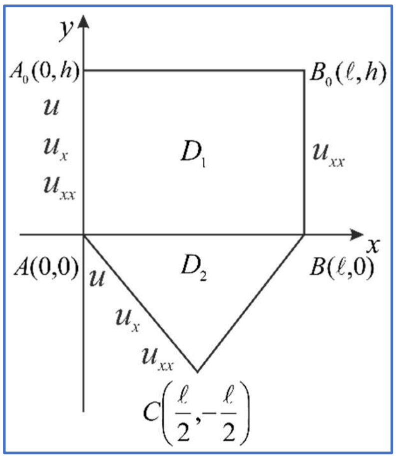

Рис. 1. Область D.

Задача 2. Требуется найти в области D_1 решение уравнения (2), удовлетворяющая условиям (4), (5) и (12), причем

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad (14)$$

$$\tau''(0) = \varphi_3(0), \tau''(\ell) = \varphi_4(0). \quad (15)$$

Задача 3. Требуется найти в области D_2 решение уравнения (3), удовлетворяющая условиям (6) – (8) и (11), причем

$$\tau(0) = \psi_1(0),\ \tau'(0) = \psi_2(0), \tau''(0) = \psi_3(0). \quad (16)$$

2. Решение задачи 3. Введем новую неизвестную функцию $\vartheta_2(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \vartheta_2(x,y),\ (x,y) \in D_2. \quad (17)$$

Тогда из (3) для определения $\vartheta_2(x,y)$ имеем уравнение

$$L_{12}\vartheta_2 \equiv \vartheta_{2xx} - \vartheta_{2yy} + a_2(x,y)\vartheta_{2x} + b_2(x,y)\vartheta_{2y} + c_2(x,y)\vartheta_2 = 0, (x,y) \in D_2, \quad (18)$$

а из (12) и (13) получим начальные условия

$$\vartheta_2(x,0) = \tau''(x), \vartheta_{2y}(x,0) = \nu''(x),\ 0 \le x \le \ell. \quad (19)$$

Решение задачи (18), (19) имеет вид [5, 6]

$$\begin{aligned}\vartheta_2(x,y) &= \frac{1}{2}\left[R(x,y;x+y,0)\tau''(x+y) + R(x,y;x-y,0)\tau''(x-y)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\left[R_\eta(x,y;\xi,0) + b_2(\xi,0)R(x,y;\xi,0)\right]\tau''(\xi)\,d\xi - \\ &- \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} R(x,y;\xi,0)\nu''(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \quad (20)$$

где $R(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, которая определяется как решение следующей задачи Гурса:

$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (a_2R)_\xi - (b_2R)_\eta + c_2R = 0, (\xi,\eta) \in D_2^*, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}R(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=x+y-\xi} &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_\xi^x\left[a_2(t,x+y-t) + \right.\right. \\ &\left.\left. + b_2(t,x+y-t)\right]dt\right\},\ x+y \le \xi \le x,\end{aligned} \quad (22)$$

$$R(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi-x+y}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^\xi\left[a_2(t,t-x+y)-\right.\right. \tag{23}$$

$$\left.\left.-b_2(t,t-x+y)\right]dt\right\},\ x\le\xi\le x-y,$$

$$R(x,y;x,y)=1. \tag{24}$$

где $D_2^*=\{(\xi,\eta): y<\eta<0, x+y-\eta<\xi<x-y+\eta\}$ (Рисунок 2)

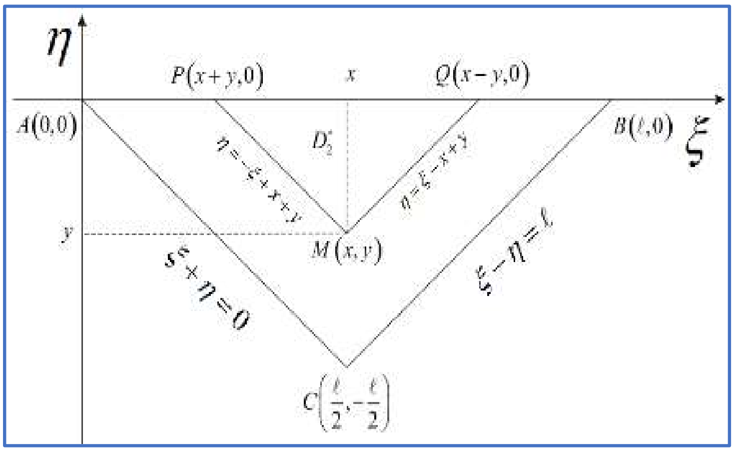

Рис. 2. Область D_2^*.

Чтобы получить формулы (20) в области D_2^* составим тождество

$$wL_{12}(\vartheta_2)-\vartheta_2 M(w)=\left(w\vartheta_{2\xi}-w_\xi\vartheta_2+aw\vartheta_2\right)_\xi-\left(w\vartheta_{2\eta}-w_\eta\vartheta_2-bw\vartheta_2\right)_\eta, \tag{25}$$

где

$$M(w)\equiv w_{\xi\xi}-w_{\eta\eta}-(aw)_\xi-(bw)_\eta+cw=0.$$

Интегрируя тождество (25) и используя формулу Грина, имеем

$$\iint_{D_2^*}\left[wL_{12}(\vartheta_2)-\vartheta_2 M(w)\right]d\xi d\eta= \tag{26}$$

$$=\int_{\partial D_2^*}\left(w\vartheta_{2\eta}-w_\eta\vartheta_2-bw\vartheta_2\right)d\xi+\left(w\vartheta_{2\xi}-w_\xi\vartheta_2+aw\vartheta_2\right)d\eta,$$

где $\partial D_2^*=PM\cup MQ\cup QP.$

Вычислим криволинейный интеграл по участку PM, где $\eta=-\xi+x+y$. Тогда $d\eta=-d\xi$, $x+y\le\xi\le x$. Пусть на этом участке выполняется соотношение

$$\frac{d}{d\xi}w(\xi,-\xi+x+y)= \tag{27}$$

$$=\frac{1}{2}\left[a(\xi,-\xi+x+y)+b(\xi,-\xi+x+y)\right]w(\xi,-\xi+x+y)=0.$$

С учетом (27) имеем

$$\int_{PM}=-w(x,y;x,y)\vartheta_2(x,y)+w(x,y;x+y,0)\vartheta_2(x+y,0). \tag{28}$$

Уравнение (27) запишем в виде

$$\frac{dw(\xi,-\xi+x+y)}{w(\xi,-\xi+x+y)}=\frac{1}{2}\left[a(\xi,-\xi+x+y)+b(\xi,-\xi+x+y)\right]d\xi$$

Интегрируя это соотношение в пределах от ξ до x, имеем

$$ln\, w(\xi,-\xi+x+y)\Big|_{\xi=\xi}^{\xi=x}=\frac{1}{2}\int_{\xi}^{x}\left[a(t,-t+x+y)+b(t,-t+x+y)\right]dt,$$

или

$$ln\frac{w(\xi,-\xi+x+y)}{w(x,y)}=-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{x}\left[a(t,-t+x+y)+b(t,-t+x+y)\right]dt.$$

Тогда

$$w(\xi,-\xi+x+y)=w(x,y)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{x}\left[a(t,-t+x+y)+b(t,-t+x+y)\right]dt\right].$$

Заметив, что w зависит еще и от переменных x и y, имеем

$$\begin{aligned}&w(x,y;\xi,-\xi+x+y)=w(x,y;x,y)\times\\&\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{x}\left[a(t,-t+x+y)+b(t,-t+x+y)\right]dt\right\}.\end{aligned}\tag{29}$$

Вычислим криволинейный интеграл по участке MQ, где $\eta=-\xi+x+y$. Тогда $d\eta=d\xi,\ x\le\xi\le x-y$. Пусть выполняется условие

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\xi}w(\xi,\xi-x+y)=\\&=\frac{1}{2}\left[a(\xi,\xi-x+y)-b(\xi,\xi-x+y)\right]w(\xi,\xi-x+y)=0,x\le\xi\le x-y\end{aligned}\tag{30}$$

Тогда с учетом (30) имеем

$$\int_{MQ}=w(x,y;x-y,0)\vartheta_2(x-y,0)-w(x,y;x,y)\vartheta_2(x,y).\tag{31}$$

Уравнение (30) запишем в виде

$$\frac{dw(\xi,\xi-x+y)}{w(\xi,\xi-x+y)}=\frac{1}{2}\left[a(\xi,\xi-x+y)+b(\xi,\xi-x+y)\right].$$

Интегрируя полученное равенство по ξ в пределах от x до ξ, имеем

$$ln\, w(\xi,\xi-x+y)\Big|_{\xi=x}^{\xi=\xi}=\frac{1}{2}\int_{x}^{\xi}\left[a(t,t-x+y)-b(t,t-x+y)\right]dt.$$

Отсюда получим

$$w(\xi,\xi-x+y)=w(x,y)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x}^{\xi}\left[a(t,t-x+y)+b(t,t-x+y)\right]dt\right\}.$$

Так как w зависит еще и от x и y, то

$$\begin{aligned}&w(x,y;\xi,\xi-x+y)=w(x,y;x,y)\times\\&\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x}^{\xi}\left[a(t,t-x+y)-b(t,t-x+y)\right]dt\right\},x\le\xi\le x-y\end{aligned}\tag{32}$$

Вычислим криволинейный интеграл по участке QP, где $x+y\le\xi\le x-y$. На этом участке $\eta=0$, то есть $d\eta=0$. Тогда

$$\int\limits_{QP} = -\int\limits_{x+y}^{x-y} w(x,y;\xi,0)\vartheta_{2\eta}(\xi,0)d\xi + \int\limits_{x+y}^{x-y}\left[w_\eta(x,y;\xi,0)+\right.$$
$$\left.+b(\xi,0)w(x,y;\xi,0)\right]\vartheta_2(\xi,0)d\xi = \tag{33}$$
$$=\int\limits_{x+y}^{x-y}\left[w_\eta(x,y;\xi,0)+b(\xi,0)w(x,y;\xi,0)\right]\tau''(\xi)d\xi -$$
$$-\int\limits_{x+y}^{x-y} w(x,y;\xi,0)\nu''(\xi)d\xi.$$

Таким образом из (26) с учетом (28), (31) и (33) имеем

$$-w(x,y;x,y)\vartheta_2(x,y)+w(x,y;x+y,0)\vartheta_2(x+y,0)+$$
$$+w(x,y;x-y,0)\vartheta_2(x-y,0)-w(x,y;x,y)\vartheta_2(x,y)+$$
$$+\int\limits_{x+y}^{x-y}\left[w_\eta(x,y;\xi,0)+b(\xi,0)w(x,y;\xi,0)\right]\tau''(\xi)d\xi - \tag{34}$$
$$-\int\limits_{x+y}^{x-y} w(x,y;\xi,0)\nu''(\xi)d\xi.$$

Отсюда, полагая

$$w(x,y;x,y)=1$$

имеем

$$\vartheta_2(x,y)=\frac{1}{2}w(x,y;x+y,0)\tau''(x+y)+\frac{1}{2}w(x,y;x-y,0)\tau''(x-y)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\left[w_\eta(x,y;\xi,0)+b(\xi,0)w(x,y;\xi,0)\right]\tau''(\xi)d\xi - \tag{35}$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} w(x,y;\xi,0)\nu''(\xi)d\xi.$$

Пусть $w(x,y;\xi,\eta)=R(x,y;\xi,\eta)$. Тогда в (35) получаем формулу (20).

Интегрируя дважды соотношение (17) по x в пределах от 0 до x, находим решение задачи 3 в виде

$$u(x,y)=\psi_1(x)+(x+y)\psi_2(y)+\int\limits_{-y}^{x}(x-\xi)\vartheta_2(\xi,y)d\xi,(x,y)\in D_2. \tag{36}$$

<u>2. Решение задачи 2.</u> В области D_1 введем функцию $\vartheta_1(x,y)$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\vartheta_1(x,y),\ (x,y)\in D_1. \tag{37}$$

Тогда из (2) для $\vartheta_1(x,y)$ приходим к уравнению

$$L_{11}\vartheta_1 \equiv \vartheta_{1xx}-\vartheta_{1y}+c_1(x,y)\vartheta_1=0,(x,y)\in D_1, \tag{38}$$

а из (5) и (12) имеем

$$\vartheta_1\big|_{x=0}=\varphi_3(y),\ \vartheta_1\big|_{x=\ell}=\varphi_4(y),\ 0\le y\le h,$$
$$\vartheta_1(x,0)=\tau''(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{39}$$

Пусть имеет место неравенство

$$\forall(x,y)\in\overline{D_1}: c_1(x,y)\le 0. \tag{40}$$

Тогда задача (38), (39) имеет единственное решение.

Рассмотрим однородную задачу (38), (39). Умножая (38) на $\vartheta_1(x,y)$ и интегрируя полученное равенство по области D_1 имеем

$$\iint_{D_1}\vartheta_1 L_{11}\vartheta_1 dxdy=\frac{1}{2}\int_0^\ell \vartheta_1^2(x,h)dx-\iint_{D_1}c_1(x,y)\vartheta_1^2(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда при выполнении условия (40) заключаем, что $\forall(x,y)\in D_1:\vartheta_1(x,y)\equiv 0.$

Уравнение (38) запишем в виде

$$\vartheta_{1xx}-\vartheta_{1y}=-c_1(x,y)\vartheta_1(x,y). \tag{41}$$

Тогда используя функцию Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности имеем

$$\vartheta_1(x,y)=f(x,y)+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K(x,y;\xi,\eta)\vartheta_1(\xi,\eta)d\xi, \tag{42}$$

где

$$K(x,y;\xi,\eta)=-c_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta),$$

$$f(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^\ell G_\xi(x,y;\xi,0)\tau''(\xi)d\xi,$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=+\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)\right]$$ – функция Грина [7].

Заметим, что для ядра уравнения (42) имеет оценка

$$\forall(x,y)\in\bar{D}_1\wedge\forall(\xi,\eta)\in\bar{D}_1:\left|K(x,y;\xi,\eta)\right|\le\frac{M}{(y-\eta)^{1/2}},$$

где M - положительная константа. Поэтому уравнение (42) является интегральным уравнением типа Фредгольма со слабой особенностью, она разрешима и имеет единственное решение, которое строится методом последовательных приближений [8].

<u>4. Нахождение функций</u> $\tau(x)$ и $\nu(x)$**.** Отметим, что решение задачи 1 будет полностью определена, если будет найдены функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $0\le x\le\ell$.

Используя краевое условие (8) из (17), имеем

$$\vartheta_2(x,y)\big|_{x=-y}=\psi_3(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0. \tag{43}$$

Для удобства записи введем обозначение

$$\tau''(x)=\tau_1(x),\ \nu''(x)=\nu_1(x),\ 0\le x\le\ell. \tag{44}$$

Тогда из (20) имеем

$$\begin{gathered}2\vartheta_2(x,y)=R(x,y;x+y,0)\tau_1(x+y)+R(x,y;x-y,0)\tau_1(x-y)+\\+\int_{x+y}^{x-y}R(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi-\int_{x+y}^{x-y}R(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)d\xi.\end{gathered} \tag{45}$$

где $R_1(x,y;\xi)=R_\eta(x,y;\xi,0)+b_2(\xi,0)R(x,y;\xi,0).$

Полагая $x=-y$ в (45) и с учетом условия (43) получим

$$R(-y,y;-2y,0)\tau_1(-2y)=-\int_0^{-2y}R_1(-y,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^{-2y}R(-y,y;\xi,0)\nu_1(\xi)d\xi+2\psi_3(y)-R(-y,y;0,0)\tau_1(0), \tag{46}$$

где $-\frac{\ell}{2}\le y\le 0.$

Условия (23) запишем в виде

$$R(x,y;\xi,\xi-x+y)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^{\xi}\left[a_2(t,t-x+y)-b_2(t,t-x+y)\right]dt.\right.$$

Отсюда, полагая $\xi=x-y$ имеем

$$R(x,y;x-y,0)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_x^{x-y}\left[a_2(t,t-x+y)-b_2(t,t-x+y)\right]dt.\right.$$

Пусть $x=-y.$ Тогда

$$R(-y,y;-2y,0)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{-y}^{-2y}\left[a_2(t,t+2y)-b_2(t,t+2y)\right]dt.\right.$$

Следовательно

$$\forall y\in\left[-\frac{\ell}{2},0\right]:R(-y,y;-2y,0)>0. \tag{47}$$

Пусть $-2y=z.$ Тогда $0\le z\le\ell.$ Равенство (46) запишем в виде

$$R\left(\frac{z}{2},-\frac{z}{2};z,0\right)\tau_1(z)=-\int_0^{z}R_1\left(\frac{z}{2},-\frac{z}{2};\xi\right)\tau_1(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^{z}R\left(\frac{z}{2},-\frac{z}{2};\xi,0\right)\nu_1(\xi)d\xi+2\psi_3\left(-\frac{z}{2}\right)-R\left(\frac{z}{2},-\frac{z}{2};0,0\right)\varphi_3(0). \tag{48}$$

Учитывая неравенство (47), уравнение (48) представим в виде

$$\tau_1(x)=\int_0^{x}N_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\int_0^{x}N_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x), \tag{49}$$

где

$$N_1(x,\xi)=-\frac{R_1\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2};\xi\right)}{R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2};x,0\right)},\ N_2(x,\xi)=\frac{R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2};\xi,0\right)}{R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2};x,0\right)},$$

$$\Phi_1(x)=\frac{2\varphi_3\left(-\frac{x}{2}\right)-R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2};0,0\right)\varphi_3(0)}{R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2};x,0\right)}.$$

Решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (49) запишем в виде

$$\tau_1(x)=\Phi_2(x)+\int_0^{x}N_3(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi, \tag{50}$$

где

$$N_3(x,\xi)=N_2(x,\xi)+\int_\xi^x R_2(x,t)N_2(t,\xi)dt,\ \Phi(x)=\Phi_1(x)+\int_0^x R_2(x,\xi)\Phi_1(\xi)d\xi,$$

$R_2(x,\xi)-$ резольвента ядра $N_1(t,\xi)$.

Переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (41), имеем

$$\vartheta_{1xx}(x,0)-\vartheta_{1y}(x,0)=-c_1(x,0)\vartheta_1(x,0),0\le x\le\ell. \tag{51}$$

Из (51) с учетом (12), (13) и (37) получим

$$\tau^{IV}(x)-\vartheta''(x)=-c_1(x,0)\tau''(x)$$

Отсюда используя обозначение (44), приходим к следующей задаче:

$$\tau_1''(x)+c_1(x,0)\tau_1(x)=\nu_1(x),0\le x\le\ell, \tag{52}$$

$$\tau_1(0)=\varphi_3(0),\tau_1(\ell)=\varphi_4(0). \tag{53}$$

Полагая

$$\tau_1(x)=\varphi_3(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_4(0)-\varphi_3(0)\right]+z(x), \tag{54}$$

где $z(x)-$ новая неизвестная функция, задача (52), (53) сводится к следующей задаче

$$z''(x)+c_1(x,0)z(x)=g(x), \tag{55}$$

$$z(0)=0,\ z(\ell)=0, \tag{56}$$

где $g_1(x)=\nu_1(x)-c_1(x,0)\left\{\varphi_3(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_4(0)-\varphi_3(0)\right]\right\}.$

Задача (55), (56) имеет единственное решение при любых $g(x)$, если выполняется условие

$$\forall x\in[0,\ell]:c_1(x,0)\le 0. \tag{57}$$

В самом деле, умножая однородное уравнение (55) на $z(x)$, затем интегрируя по x от 0 до ℓ, имеем

$$\int_0^\ell z(x)\left[z''(x)+c_1(x,0)z(x)\right]dx=\int_0^\ell\left\{c_1(x,0)z^2(x)-\left[z'(x)\right]^2\right\}dx=0$$

Отсюда заключаем, что при выполнении условия (56) и (57) имеем $\forall x\in[0,\ell]:z(x)\equiv 0.$

Решение задачи (55), (56) представим в виде [9]

$$z(x)=\int_0^\ell G_1(x,\xi)g_1(\xi)d\xi, \tag{58}$$

где $G_1(x,\xi)-$ функция Грина.

Тогда из (54) имеем

$$\tau_1(x)=g_2(x)+\int_0^\ell G_1(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi, \tag{59}$$

где $g_2(x)=\varphi_3(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_4(0)-\varphi_3(0)\right]-\int_0^\ell c_1(\xi,0)G_1(x,\xi)\left\{\varphi_3(0)+\frac{\xi}{\ell}\left[\varphi_4(0)-\varphi_3(0)\right]\right\}d\xi.$

Исключая из (50) и (59) $\tau_1(x)$ получаем

$$\Phi_2(x)+\int_0^x N_3(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi=g_2(x)+\int_0^\ell G_1(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi$$

Продифференцирую это уравнение и учитывая при этом равенство $N_3(x,x)=N_2(x,x)=1,$ имеем

$$\nu_1(x)+\int_0^x N_{3x}(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi = g_2'(x)-\Phi_2'(x)+\int_0^\ell G_{1x}(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi$$

Обращая Вольтеровскую часть этого уравнения, получим

$$\nu_1(x)=\int_0^\ell N(x,t)\nu_1(t)dt+g(x), \tag{60}$$

где $N(x,t)=G_{1x}(x,t)+\int_0^x R_3(x,\xi)G_{1x}(\xi,t)d\xi,$

$$g(x)=g_2'(x)-\Phi_2'(x)+\int_0^x R_3(x,\xi)\left[g_2'(\xi)-\Phi_2'(\xi)\right]d\xi,$$

$R_3(x,\xi)-$резольвента ядра $-N_{3x}(x,\xi)$.

Пусть

$$\|N\|=\max_{\substack{0\le x\le\ell\\0\le t\le\ell}}|N(x,t)|.$$

Если выполняется условие $\|N\|\le 1,$ (61)

тогда уравнение (60) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$\nu_1(x)=g(x)+\int_0^\ell R_4(x,\xi)g(\xi)d\xi, \tag{62}$$

где $R_4(x,\xi)-$резольвента ядра $N(x,t)$.

Тогда с учетом (62) из (50) найдем $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\Phi_2(x)+\int_0^x N_3(x,\xi)g(\xi)d\xi+\int_0^x N_3(x,\xi)d\xi\int_0^\ell R_4(\xi,t)g(t)dt.$$

Для определения $\tau(x)$ из (44) и (14) получим следующую задачу

$$\begin{cases}\tau''(x)=\tau_1(x),\ 0\le x\le\ell,\\ \tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\varphi_2(0)\end{cases} \tag{63}$$

Решение задачи (63) имеет вид

$$\tau(x)=\varphi_1(0)+x\varphi_2(0)+\int_0^x (x-\xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Таким образом доказали следующую теорему.

Теорема. Если выполняются условия (9), (10), (11), (40), (61), тогда задача 1 имеет единственное решение.

Литература:

1. Жегалов В.И. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Известия вузов. Математика. – 1999. №10. - С. 73-76.
2. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А.Сопуев. - Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.
4. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М.Мамажанов - Ташкент: Фан, 1986. - 220 с.
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 736 с.
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики [Текст] / А.В. Бицадзе. - М.: Наука, 1976. - 296 с.
7. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа [Текст] / А. Фридман. - М.: Мир, 1968. - 428 с.
9. Денисов А.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / А.М. Денисов, А.В Разгулин. - М.: МГУ, 2009. - 114 с.