DOI:10.26104/NNTIK.2022.10.90.002

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.

КИЧИ ПАРАМЕТРЛҮҮ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕКТИК ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕНИ ЧЕЧИМИ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.

О РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

B. Ablabekov, A. Mukanbetova

ON THE SOLUTION OF THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

УДК: 517.95: 517.956.322

Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз (биздин учурда жарым октогу биринчи түрдөгү чектик маселе) маселелердин чечимдерин билүү маанилүү роль ойнойт. Макалада жарым окктогу биринчи түрдөгү чектик маселе болгон учурда кичинекей параметрлүү псевдопараболикалык теңдеме үчүн бир чектик тескери маселеси изилденет. Маселенин маңызы – чыгарылыш менен бирге чектик шартты табуу талап кылынат. Маселе жарым тегиздикте каралат. Кошумча шарт катары ички чекиттеги шарты колдонулат. Фундаменталдык чыгарылыштын жардамы менен каралып жаткан чектик тескери маселе экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесин чыгарууга келтирилет. Каралып жаткан маселенин классикалык чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгы тууралуу теоремалары далилденген. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгын далилдөө үчүн Вольтерранын оператордук теңдемелер ыкмасы колдонулат.

***Негизги сөздөр**: псевдопараболалык тендеме, чектик тескери маселе, классикалык чыгарылыш, кичи параметр, кайра аныктоо, Вольтерранын оператордук теңдемелер ыкмасы, кичинекей параметр.*

При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае краевой задачи граничными условиями первого рода) задачи. В статье исследована одна граничная обратная задача для псевдопараболического уравнения с малым параметром, в случае первой краевой задачи на полуоси. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением найти граничное условие. Задача рассматривается в полуплоскости. В качестве дополнительного условия используется условие внутреннего переопределение. С помощью фундаментального решения рассматриваемая граничная обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод операторных уравнений Вольтерра.

***Ключевые слова:** псевдопараболическое уравнение, граничная обратная задача, переопределение, метод операторных уравнений Вольтерра, малый параметр.*

In the study of inverse problems of mathematical physics, an important role is played by the knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, the boundary value problem by boundary conditions of the first kind) problem. In the article, one boundary inverse problem for a pseudoparabolic equation with a small parameter is investigated in the case of the first boundary value problem on the semiaxis. The essence of the problem is that, together with the solution, it is required to find the boundary condition. The problem is considered in a half-plane. The internal override condition is used as an additional condition. With the help of a fundamental solution, the boundary inverse problem under consideration is reduced to solving a Volterra integral equation of the second kind. Existence and uniqueness theorems for the classical solution of the problem under consideration are proved. To prove the existence and uniqueness of the solution of the problem posed, the method of operator equations of Volterra is used.

***Key words:** pseudoparabolic equation, boundary inverse problem, redefinition, Volterra method of operator equations, small parameter.*

Киришүү. Физиканын, механиканын жана биологиянын көптөгөн прикладдык маселелери псевдопараболикалык теңдемелерге келтирилет, атап айтканда, жаракалуу-көңдөй чөйрөлөрдөгү суюктуктарды фильтрациялоо [1], гетерогендик чөйрөдө жылуулук өткөрүмдүүлүк [2], топурактагы нымдуулук [3] псевдопараболикалык үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге алып келет.

[5-9] эмгектеринде псевдопараболикалык теңдеме үчүн

$$u_t(x,t)-\alpha u_{xxt}(x,t)-\beta u_{xx}(x,t)=f(x,t), \quad x\in(0,l), t\in(0,T]$$

биринчи жана экинчи түрдөгү баштапкы чектик маселелер Фурье ыкмасы менен изилденген, мында $\alpha,\beta>0-const.$

Псевдопараболикалык типтеги теңдемелердин локалдык, локалдык эмес жана аралаш чектик маселелери [5-9] изилденген.

Псевдопараболикалык теңдемелер үчүн түз жана тескери маселелер [5] ишинде кеңири изилденген. Бул эмгекте биз кичинекей параметри бар үчүнчү даражадагы псевдопараболалык теңдеме үчүн аралаш түрдөгү баштапкы-чек ара маселесин карайбыз.

Алгач биз керектүү белгилерди жана аныктамаларды киргизели. Мейли $Q_T^+ = \{(x,t): x \in (0,+\infty),\ t \in (0,T]\}$, мында $T > 0$ – фиксирленген турактуу.

$C^{(n,m)}(\bar{Q}_T^+)$ – каалагандай $(x.t) \in \bar{Q}_T^+$ үчүн аныкталган жана $D_x^k D_t^l v \in C(\bar{Q}_T^+)$, $0 \le k \le n$, $0 \le l \le m$ аныкталган $v(x,t)$ функцияларынын мейкиндиги.

$C^{(n,m)}(Q_T)$– $0 \le k \le n$, $0 \le l \le m$ үчүн $\dfrac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial t^l} \in C(Q_T)$ болгон жана Q_T да аныкталган $v(x,t)$ функциясынын мейкиндиги;

$M_\gamma(Q_T)$–төмөндөгү

$|v(x,t)| \le \beta\, exp\{\gamma|x|\}, x \in (0;+\infty), 0 \le t \le T,$

$\gamma \ge 0$ – чыныгы сан, $\beta = const$; Q_T да берилген, $v(x,t)$ функциясынын классы;

$M_\gamma(Q_T)$–төмөндө берилген баалоо орун алган $f(x)$ функциясынын классы

$|f(x)| \le \beta\, exp\{\gamma|x|\}, x \in (0;+\infty), \beta = const > 0;$

$C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T)$–өздөрүнүн (n,m) тартибине чейин туундулары менен бирге $M_\gamma(Q_T)$ге таандык болгон $C^{(n,m)}(Q_T)$ дагы функциялардын көптүгү, б.а. каалагандай $0 \le k \le n$, $0 \le l \le m$ үчүн $\dfrac{\partial^{k+i} v}{\partial x^k \partial t^l} \in M_\gamma(Q_T)$,

$C_{M_\gamma}^{(n)}(-\infty,\infty)$ ушул сыяктуу эле аныкталат,

$C_0^1([0,T]) \equiv \{\psi(t) \in C^1([0,T]),\quad \psi(0) = 0\}.$

1-аныктама. Эгерде $\gamma \ge 0$ чыныгы сан үчүн жана $C(t)$ үзгүлтүксүз оң функциясы табылып жана

$|v(x,t)| \le C(t)\exp\{\gamma|x|\},\ x \in [0,+\infty),\quad 0 \le t \le T$

баалоосу орун алса, анда $v(x,t)$ функциясы $M_\gamma(Q_T^+)$ классына таандык деп айтабыз.

1. Маселенин коюлушу жана негизги жыйынтык

Төмөнкү тескери маселени карайлы: Q_T^+ областында теңдемени жана шарттарды канаттандырган

$$Lu(x,t) \equiv u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,+\infty), \tag{2}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

$u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C\bar{Q}_T^+)$ жана $f(t) \in C_0^1\,[0;T]$ экилдик функцияларын табуу керек, мында $\alpha > 0$ – кичи параметр.

2-аныктама. Экилдик $u(x,t)$ жана $f(t)$ функциялары (1)-(4) тескери маселесинин чыгарылышы деп аталат, эгерде $u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C(\bar{Q}_T^+)$, $f(t) \in C_0^1[0,T]$ жана классикалык мааниде (1)-(4) катанаштарын канааттандырса.

1-теорема. Мейли $u_0(x) \in C_{M_\gamma}^2[0,+\infty)$, $g(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(1,0)}(\bar{Q}_T^+)$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$ жана $g(0,t) = 0, u_0(0) = 0, u_0'(0) = \varphi(0) = 0$ макулдашуу шарттары аткарылсын. Анда $\gamma < 1 - T$ болгондо (1)-(4) тескери маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз.

Далилдөө. (1)-(4) маселеси сызыктуу болгондуктан, анын чыгарылышын төмөнкү түрдө издөөгө болот $(u,f) = (\vartheta, f) + (w,0),$

мында w жана ϑ функциялары маселелерди канааттандырат

$$\begin{aligned} &w_t = \alpha w_{xxt} + w_{xx} + g(x,t), && (x,t) \in Q_T^+, \\ &w(x,0) = u_0(x), && x \in (0;+\infty), \\ &w(0,t) = 0, && 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{5}$$

жана

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = \alpha\vartheta_{xxt} + \vartheta_{xx}, && (x,t) \in Q_T^+, \\ &\vartheta(x,0) = 0, && x \in (0;+\infty), \\ &\vartheta(0,t) = f(t), && 0 \le t \le T, \\ &\vartheta_x(0,t) = \varphi(t) - w_x(0,t), && 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{6}$$

Ошентип, (1)-(4) маселе боюнча бир маанилүү чечимдүүлүгү жөнүндө теореманы далилдөө үчүн төмөнкү шарттардан $u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+) \cap C(\bar{Q}_T^+)$, $f(t) \in C_0^1([0,T])$ экилдик функцияларын аныктоо тескери маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремасын далилдөө жетиштүү:

$$u_t = \alpha u_{xxt} + u_{xx}, \qquad (x,t) \in Q_T^+, \tag{7}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in (0;+\infty), \tag{8}$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$u_x(0,t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{10}$$

[7] ишиндеги алынган жыйынтык боюнча (7) -(9) маселесинин чыгарылышы төмөнкү формула түрүндө жазсак болот:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^\infty \left[G(x-s,t) - G(x+s,t)\right] u_0(s)\,ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \left[G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)\right] f(s,\tau)\,ds\,d\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

мында

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\cos\xi x\,d\xi, \tag{12}$$

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\frac{\cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)}\,d\xi. \tag{13}$$

Андан кийин, $f(t)$ функциясы берилген деп эсептеп, алгач (7) - (9) түз маселени карайбыз. [7] ишиндеги (5) формуласына ылайык (7) -(9) маселенин чыгарылышы интегралдык формага ээ:

$$u(x,t) = e^{-\frac{x}{\alpha}} f(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^t f(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\,d\xi\,d\tau. \tag{14}$$

(14) тү x боюнча карата дифференцирлеп жана x=0 коюп жана (10) ду эске алуу менен

$$f(t) - \int_0^t K_\alpha(t,\tau) f(\tau)\,d\tau = -\alpha\varphi(t), \tag{15}$$

интегралдык теңдемесин алабыз, мында

$$K_\alpha(t,\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\alpha\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\,d\xi. \tag{16}$$

$K_\alpha(t,\tau)$ ядросунун $0<\tau<t<T$ областындаа үзгүлтүксүз экендигин көрсөтөлү.

Ал үчүн (16) өздүк эмес интегралынын бир калыпта жыйналышын көрсөтүү жетиштүү. Чындыгында эле,

$$\left|\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\frac{\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\right)\right| < \frac{\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2},$$

болгондуктан, анда $\int_0^\infty \frac{\xi^2}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi$ өздүк эмес интегралы жыйналат. Демек, (15) интегралдык теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ. Табылган $f(t)$ функциясын (14) ко коюп, $u(x,t)$ функциясын табабыз. 1-теорема далилденди.

2-теорема. Мейли (u_1, f_1) жана (u_2, f_2) функциялары (5)-(7) тескери маселенин шарттарын канааттандыруучу каалаган эки экилдик функциялар болушсун жана $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ тескери маселенин тиешелүү (8) кошумча маалыматтары болсун. Анда ар кандай чектүү *T>0* үчүн баалардын аткарылышы үчүн туруктуу *C=C(T)* саны табылып төмөнкү баалоо орун алат

$$\|f_1(t) - f_2(t)\|_{C([0,T])} \le C\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{C([0,T])},$$

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\bar{\Omega})} \le C\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C([0,T])}.$$

2-теореманын далилдөөсүн түздөн-түз (14), (15) интегралдык теңдемелер системасынан алууга болот.

Адабияттар:

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. - 1960. - Т. 24. - Вып. 5. - С. 852-864.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. - М.: Наука, 1976. - С. 352.
3. Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8, No. 1.P. 62–64.
4. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах. // Дифференциальные уравнения. - 1982. - Т. 18. - № 4. - С. 689-699.
5. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболичесих уравнений. - Бишкек: Илим 2001. - 183 с.
6. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им. И.Раззакова. 2011. - Т. 22. - С.235-239.
7. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. - Т. 32. - №3. - С. 29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41.
8. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром. // Евразийское Научное Объединение. - 2019. - Т. 1. - №4 (50). - С.1-5.
9. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - 2018. - №11. - С.7-11.