

*Калыков А.С.*

**СЕРПИЛГИЧ НЕГИЗДЕ ЖАЙГАШКАН ЖАРЫМ  
ЧЕКСИЗ ПЛИТАНЫН ТАТААЛ ШАРТТАРДА ИШТӨӨДӨГҮ  
ЭСЕПТӨӨ НАТЫЙЖАЛАРЫ**

*Калыков А.С.*

**РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ  
ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ СЛОЖНЫХ УСЛОВИЙ ЕЕ РАБОТЫ**

*A.S. Kalykov*

**RESULTS OF CALCULATION OF A SEMI-INFINITE  
PLATE ON AN ELASTIC BASIS TAKING INTO ACCOUNT  
DIFFICULT CONDITIONS OF ITS OPERATION**

УДК: 624.151/073.02

Бул илимий макалада винклердик серпилгич негизде жайгашкан жарым чексиз плитанын негиз менен толук эмес байланышта болгондогу жана ортонку тегиздигинде узунунан таасир эткен күчтөрдүн аракетиндеги плитанын ийилүүсүнүн сандык эсептөөнү ишке ашыруу маселелери аткарылган. Сунушталган алгоритм так ийкемдүү винклер негизинде жарым чексиз плитанын негиз менен толук эмес байланышта болгондогу жана ортонку тегиздигинде узунунан таасир эткен күчтөрдүн аракетиндеги плитанын ийилүүсүн сандык эсептөөнүн негизинде Delphi программасы аркылуу чечилген, ал эми графикалык чыгаруу AutoCAD программалык комплекстик системасында ишке ашырылган. Алынган жыйынтыктарга толук талдоо жүргүзүлгөн. Плитанын траншея түрүндөгү негиз менен толук эмес байланышта болгондогу абалы, анын өзгөчө чыналуу абалына түздөн-түз таасирин берет. Бул факторду имарат жана курулуштарды фундаменттерин проектирлөө кезинде каралышы керек.

**Негизги сөздөр:** ийилүү, плита, серпилгичтүү негиз, толук эмес байланыш, жалтыланган чечүү ыкмасы, Фурье-нин өзгөртмөсү.

В статье произведена численная реализация специфической задачи изгиба полубесконечной плиты на упругом винклеровском основании с учетом неполного контакта с основанием и влиянием продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты. На основании ранее разработанного авторами алгоритма точного аналитического решения задачи изгиба полубесконечной плиты на упругом винклеровском основании с учетом неполного контакта с основанием и влиянием продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты, составлена программа в среде Delphi, а вывод графиков осуществлен в системе программного комплекса AutoCAD. Произведен подробный поэтапный анализ полученных результатов. При этом неполный контакт полубесконечной плиты в виде траншеи, расположенной на краю плиты, влияет на напряженно-деформированное состояние плиты. Этот фактор необходимо учи-

тывать при проектировании фундаментов зданий и сооружений.

**Ключевые слова:** изгиб, плита, упругое основание, неполный контакт, обобщенные решения, преобразование Фурье.

The article provides a numerical implementation of the specific problem of bending a semi-infinite plate on an elastic Winkler base, taking into account incomplete contact with the base and the influence of longitudinal forces applied in the median plane of the plate. Based on the recommended algorithm for the exact analytical solution of the problem of bending a semi-infinite slab on an elastic Winkler base, taking into account incomplete contact with the base and the influence of longitudinal forces applied in the middle plane of the slab, a program was compiled in Delphi environment, and the graphs were output in the AutoCAD software system. A detailed phased analysis of the results was made. In this case, incomplete contact of a semi-infinite slab in the form of a trench located on the edge of the slab affects the stress-strain state of the slab. This factor must be taken into account when designing the foundations of buildings and structures

**Key words:** bending, plate, elastic base, incomplete contact, generalized solutions, Fourier transform.

**Цель исследования.** Численная реализация ранее разработанного алгоритма расчета полубесконечной плиты на винклеровском упругом основании с учетом сложных условий работы плиты.

**Метод исследования.** Составление и отладка программы расчета в среде Delphi и вывод графиков с помощью системы AutoCAD.

В [1] получено точное аналитическое решение расчета полубесконечной плиты на деформируемом основании Винклера с учетом сложных условий работы плиты. При расчете краевых участков плит не полностью контактирующих с грунтом на отдельных участках расчетная схема сводится к такого рода задачам (рис.1) [2,3,4,5].

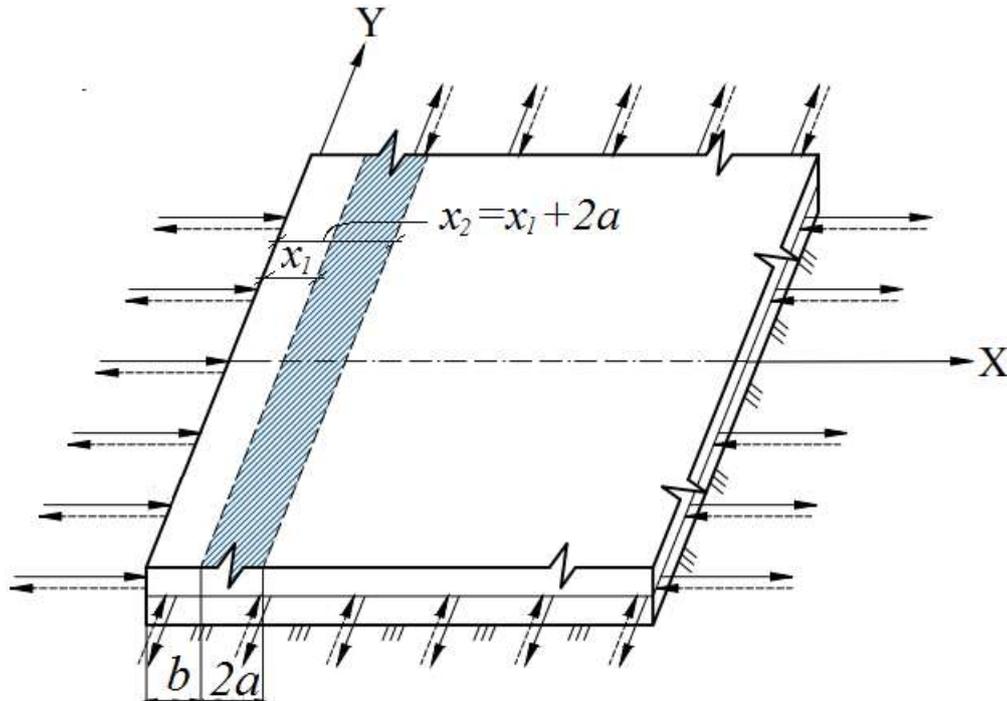


Рис. 1. Расчетная схема полубесконечной плиты на деформируемом основании Винклера с учетом сложных условий ее работы.

В этом случае, чтобы получить дифференциальное уравнение изгиба полубесконечной плиты, продлеваем плиту до бесконечной. Тогда в уравнение кроме заданной нагрузки  $q_0(x, y)$  приложим к краю плиты и нагрузку  $q_1(x, y)$ . В итоге дифференциальное уравнение изгиба плиты будет иметь вид [3,4,5,6]:

$$D\nabla\nabla W(x, y) + K[\theta(x-b-2a) + \theta(b-x)]W(x, y) - N_x \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} - N_{xy} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} = q_0(x, y) + q_1(x, y) \quad (1)$$

В безразмерных координатах уравнение (1) примет вид [1]:

$$\left\{ \nabla\nabla + [\theta(x-b-2a) + \theta(b-x)] - 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} W(x, y) = q_0(x, y) + q_k(x, y) \quad (2)$$

При действии на плиту вертикальной нагрузки  $q_0(x, y)$ , прогиб плиты определяется из решения дифференциального уравнения:

$$\left\{ \nabla \nabla - 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + [\theta(x-b-2a) + \theta(b-x)] \right\} W(x, y) = q_0(x, y) + q_1(x, y) \quad (3)$$

После двумерного преобразования Фурье выражение (3) примет вид [4,6,7]:

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_b^{b+2a} W(x, \eta) \cos \xi x dx + E(\xi, \eta) \left[ q_0(\xi, \eta) - A_1(\eta) (\xi^2 + \nu \eta^2) \right] \quad (4)$$

или

$$W(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_b^{b+2a} W(t, \eta) \int_0^\infty K(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty A_1(\eta) \alpha_0(\eta, x) \cos \eta y d\eta = W_\infty(x, y) \quad (5)$$

В интегральном уравнении (5)  $W_\infty(x, y)$  - функция прогибов бесконечной плиты в случае полного контакта с основанием. В результате применения к выражению (5)  $\cos$ -преобразование Фурье по переменной  $y$ , получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$W(x, \eta) - \int_b^{b+2a} W(t, \eta) K(x, \eta, t) dt = W_\infty(x, \eta) - \frac{1}{2\pi} A_1(\eta) \alpha_0(\eta, x) \cos \eta y d\eta \quad (6)$$

где  $\alpha_0(\eta, x) = M_2(\eta, x) + \nu \eta^2 M_0(\eta, x)$

$$M_0(\eta, x) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^4 - 1}} (B \cos Bx + A \sin Bx)$$

$$M_2(\eta, x) = \frac{\pi}{2} e^{-x\eta} (B \cos Bx + A \sin Bx)$$

здесь

(7)

В результате обратного  $\cos$  - преобразования Фурье интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6), получим:

$$W(x, y) = \int_0^\infty W(x, \eta) \cos \eta y d\eta \quad (8)$$

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) \cos \xi x \cos \eta y \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^{b+2a} W(t, \eta) \cos \xi t dt d\xi d\eta + W_\infty(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) A_1(\eta) (\xi^2 + \nu \eta^2) \cos \xi x \cos \eta y d\xi d\eta \quad (9)$$

Вторая производная выражения (9) даст нам выражения  $M_x(x, y), M_y(x, y)$ , а третья производная

выражения  $Q_x(x, y), Q_y(x, y)$ :

$$M_x(x, y) = - \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) (\xi^2 + v\eta^2) \cos \xi x \cos \eta y \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^{b+2a} W(t, \eta) \cos \xi x t d t d \xi d \eta + M_{\infty x}(x, y) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) A_1(\eta) (\xi^2 + v\eta^2) \cos \xi x \cos \eta y d \xi d \eta \right\}$$

$$M_y(x, y) = - \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) (v\xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cos \eta y \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^{b+2a} W(t, \eta) \cos \xi t d t d \xi d \eta + M_{\infty y}(x, y) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) A_1(\eta) (\xi^2 + v\eta^2) (v\xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cos \eta y d \xi d \eta \right\} \quad (10)$$

$$Q_x(x, y) = - \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) [(\xi^3 + (2-v)\xi\eta^2)] \cos \xi x \cos \eta y \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^{b+2a} W(t, \eta) \cos \xi t d t d \xi d \eta + Q_{\infty x}(x, y) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) A_1(\eta) (\xi^2 + v\eta^2) [\xi^3 + (2-v)\xi^2\eta] \cos \xi x \cos \eta y d \xi d \eta \right\}$$

$$Q_y(x, y) = - \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) [(\eta^3 + (2-v)\eta\xi^2)] \cos \xi x \cos \eta y \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^{b+2a} W(t, \eta) \cos \xi t d t d \xi d \eta + Q_{\infty y}(x, y) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty E(\xi, \eta) A_1(\eta) (\xi^2 + v\eta^2) [\eta^3 + (2-v)\xi^2\eta] \cos \xi x \cos \eta y d \xi d \eta \right\}$$

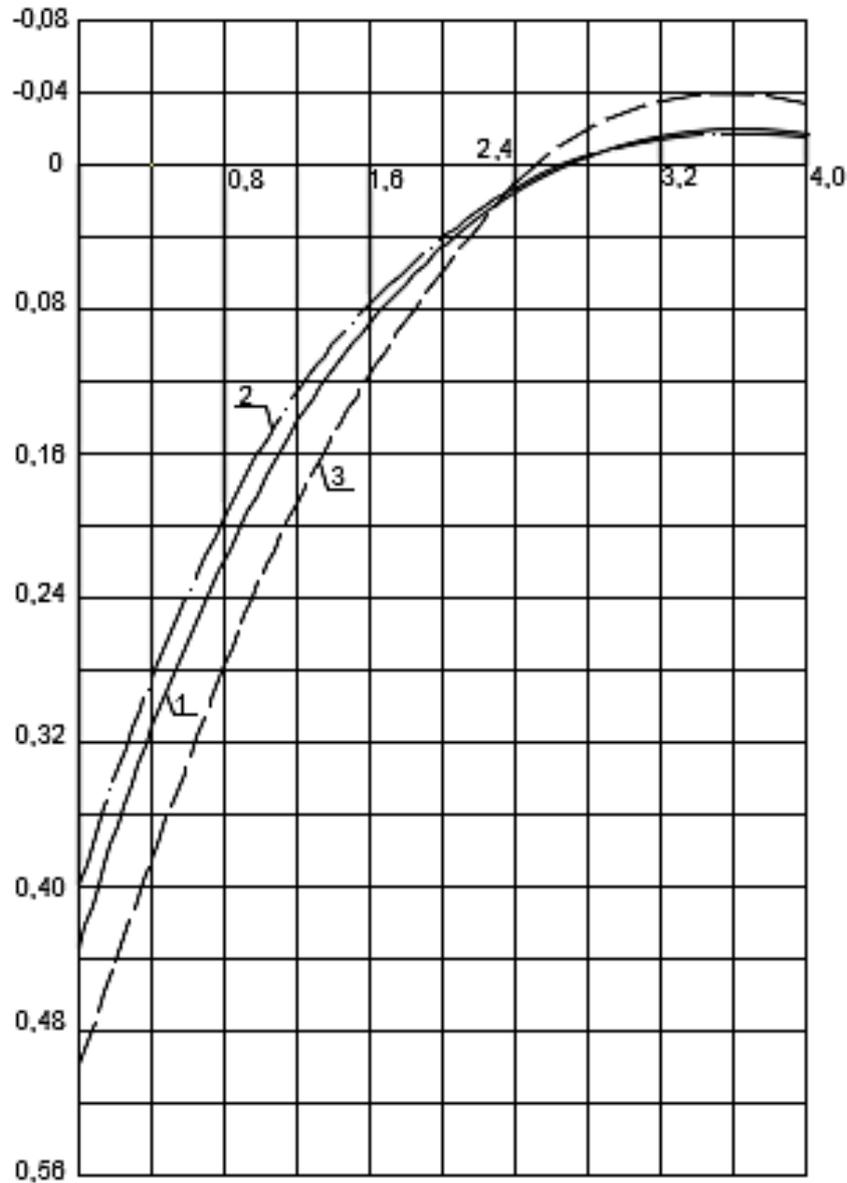
В выражениях (10)  $W_\infty(x, y), M_{\infty x}(x, y), M_{\infty y}(x, y), Q_{\infty x}(x, y), Q_{\infty y}(x, y)$  являются прогибами и внутренними усилиями бесконечной плиты в случае полного контакта с основанием.

Руководствуясь алгоритмом [1] составлена программа в среде Delphi, а вывод графиков осуществлен в системе AutoCAD [8,9].

Результаты расчета приведены на рисунках 2, 3, 4 и в таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1

<p>Результаты <math>W(x, y)</math> полубесконечной плиты на основании Винклера при полном контакте с основанием и без учета продольных усилий</p>												
$x_1$	$\frac{x_2}{x}$	0.0000	0.4000	0.8000	1.2000	1.6000	2.0000	2.4000	2.8000	3.2000	3.6000	4.0000
0.0	0.0	0,4341	0,3110	0,2182	0,1416	0,0872	0,0453	0,0154	0,0038	-0,0150	-0,0192	-0,0168
<p>Результаты <math>W(x, y)</math> полубесконечной плиты на основании Винклера при полном контакте с основанием и с учетом продольных растягивающих усилий</p>												
$x_1$	$\frac{x_2}{x}$	0.0000	0.4000	0.8000	1.2000	1.6000	2.0000	2.4000	2.8000	3.2000	3.6000	4.0000
0.0	0.0	0,3993	0,2832	0,1952	0,1250	0,0765	0,0402	0,0123	-0,0043	-0,0138	-0,0171	-0,0143
<p>Результаты <math>W(x, y)</math> полубесконечной плиты на основании Винклера при полном контакте с основанием и с учетом продольных сжимающих усилий</p>												
$x_1$	$\frac{x_2}{x}$	0.0000	0.4000	0.8000	1.2000	1.6000	2.0000	2.4000	2.8000	3.2000	3.6000	4.0000
0.0	0.0	0,4992	0,3834	0,2772	0,1856	0,1158	0,0585	0,0100	-0,0201	-0,0351	-0,0392	-0,0334



**Рис. 2.** Значения прогибов  $W(x,y)$  в полубесконечной плите на деформируемом основании Винклера с учетом сложных условий ее работы.

- 1 – кривая прогибов в полу бесконечной плите при полном контакте с основанием без учета продольных усилий, приложенных в срединной плоскости;  
 2 – кривая прогибов в полу бесконечной плите при полном контакте с основанием с учетом продольных растягивающих усилий, приложенных в срединной плоскости при  $a = 0,5$ , где  $a$  - коэффициент пропорциональности интенсивности продольных усилий;  
 3 – кривая прогибов в полубесконечной плите при полном контакте с основанием с учетом продольных сжимающих усилий, приложенных в срединной плоскости при  $a = 0,5$ .

Таблица 2

Результаты $M(x,y)$ полубесконечной плиты на основании Винклера при полном контакте с основанием и без учета продольных усилий												
$x_1$	$\frac{x_2}{x}$	0.0000	0.4000	0.8000	1.2000	1.6000	2.0000	2.4000	2.8000	3.2000	3.6000	4.0000
0.0	0.0	$\infty$	0,1280	0,1461	0,1177	0,0769	0,0615	0,0595	0,0691	0,0871	0,0964	0,0984
Результаты $M(x,y)$ полубесконечной плиты на основании Винклера при полном контакте с основанием и с учетом продольных растягивающих усилий												
$x_1$	$\frac{x_2}{x}$	0.0000	0.4000	0.8000	1.2000	1.6000	2.0000	2.4000	2.8000	3.2000	3.6000	4.0000
0.0	0.0	$\infty$	0,1124	0,1165	0,1002	0,0754	0,0581	0,0443	0,0303	0,0175	0,0103	0,0084
Результаты $M(x,y)$ полубесконечной плиты на основании Винклера при полном контакте с основанием и с учетом продольных сжимающих усилий												
$x_1$	$\frac{x_2}{x}$	0.0000	0.4000	0.8000	1.2000	1.6000	2.0000	2.4000	2.8000	3.2000	3.6000	4.0000
0.0	0.0	$\infty$	0,0803	0,1083	0,1158	0,1108	0,0995	0,0796	0,511	0,0208	0,0067	0,0040

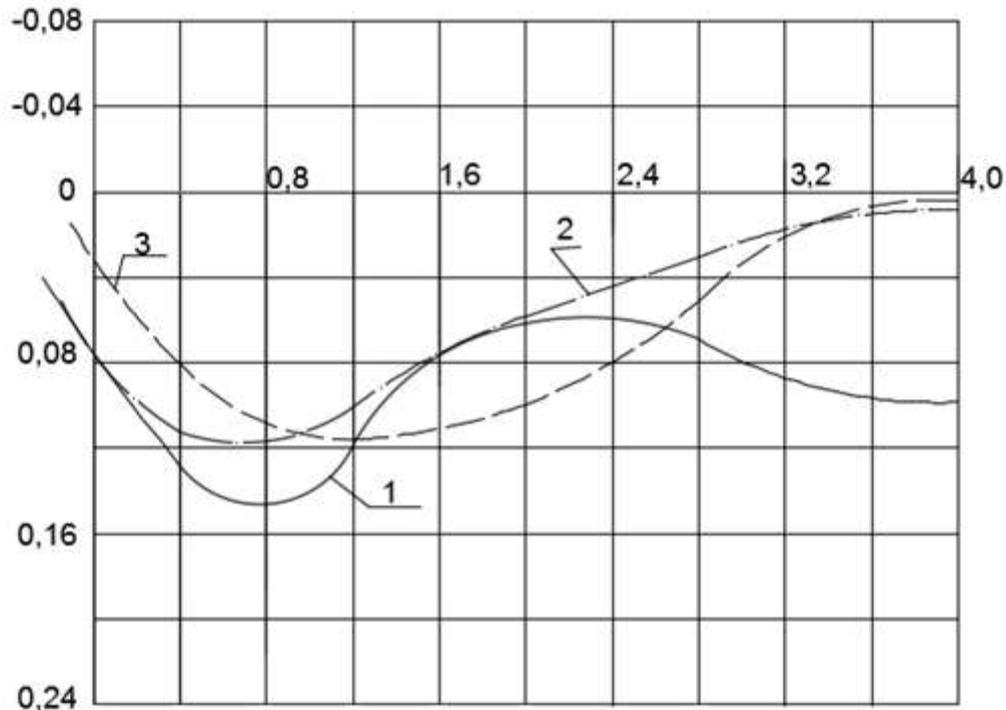


Рисунок 3. Значения прогибов  $M(x,y)$  в полубесконечной плите на деформируемом основании Винклера с учетом сложных условий ее работы.

- 1 – кривая изгибающих моментов в полубесконечной плите при полном контакте с основанием без учета продольных усилий, приложенных в срединной плоскости;
- 2 – кривая изгибающих моментов в полубесконечной плите при полном контакте с основанием с учетом продольных растягивающих усилий, приложенных в срединной плоскости при  $a = 0,5$ ;
- 3 – кривая изгибающих моментов в полубесконечной плите при полном контакте с основанием с учетом продольных сжимающих усилий, приложенных в срединной плоскости при  $a = 0,5$ .

**Выводы:** Анализ результатов расчета полубесконечной плиты на деформируемом основании Винклера с учетом и без учета продольных усилий при полном контакте плиты с основанием показывает:

1. Без учета продольных растягивающих усилий при полуширине траншеи  $a=0$ , т.е. при полном контакте конструкции плиты с основанием прогиб в безразмерных величинах в начале координат равен  $W(x,y)=0,4341$ ; с учетом продольных растягивающих усилий прогиб также в начале координат  $W(x,y)=0,3993$ , т.е. в 1,09 раза меньше.

2. С учетом продольных сжимающих сил, приложенных в срединной плоскости плиты при тех же параметрах прогиб в начале координат  $W(x,y)=0,4992$ , т.е. в 1,15 раза больше, чем без их учета при полном контакте плиты с основанием.

3. Изгибающий момент в точке с координатой  $x=0,4$  без учета продольных усилий при полном контакте плиты с основанием  $M(x,y)=0,1280$ , а с учетом продольных растягивающих усилий  $M(x,y)=0,1124$ , т.е. в 1,14 раза меньше.

4. Изгибающий момент в точке с координатами  $x=0,4$  без учета продольных сжимающих усилий при полном контакте плиты с основанием  $M(x,y)=0,1280$ , а с учетом продольных сжимающих усилий  $M(x,y)=0,0803$ , т.е. в 1,59 раза меньше.

На основании анализа полученных результатов следует, что учет сложных условий работы плиты влияют на напряженно-деформированное состояние плиты. Этот фактор необходимо учитывать при проектировании фундаментов зданий и сооружений.

**Литература:**

1. Маруфий А.Т. Изгиб полубесконечной плиты на упругом основании с особыми условиями её работы [Текст] / А.Т. Маруфий, А.С. Калыков // Вестник КГУСТА. - 2019. - №3. - С. 424-430.
2. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием [Текст] / А.Т. Маруфий, Э.С. Рысбекова // Вестник КГУСТА. - 2015. - №2. - С. 66-70.
3. Маруфий А.Т. Расчет краевых участков плит, лежащих на упругом основании при отсутствии основания на части плиты [Текст] / А.Т. Маруфий // Научный вестник ФерГУ. - 1996. - №1. - С.65-69
4. Маруфий А.Т. Расчет плит на упругом основании при отсутствии основания под частью плиты [Текст] / А.Т.Маруфий // «Основания, фундаменты и механика грунтов». - М., 1999. - №4. - С.27-31.
5. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском основании с учетом поперечной и продольной нагрузок [Текст] / А.Т. Маруфий, А.Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ. - 1996. - №3. - С.51-53.
6. Маруфий А.Т. Изгиб полубесконечной плиты лежащей на упругом основании Винклера с учетом влияния продольных усилий [Текст] / А.Т.Маруфий, А.Т.Турганбаев // Научный вестник ФерГУ. - 1996. - №1. - С. 70-73.
7. Травуш В.И. Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании [Текст] / В.И. Травуш // Строительная механика и расчет сооружений. - 1982. - №1. - С. 24-28.
8. Чертик А.А. Программирование в среде Delphi [Текст] / А.А.Чертик. - СПб: Питер, 2008. - С.400
9. Соколова Т.Ю. AutoCAD - 2008 [Текст] / Т.Ю. Соколова. - СПб: Питер, 2008. - С. 174.