DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Байболотов Б.А., Маданбекова Э.Э., Усенбаева К., Орозбаева Н.

ГАЛЕРКИНДИН ЫКМАСЫ МЕНЕН КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕТТИК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУДА MAPLE ПРОГРАММАСЫН КОЛДОНУУ

Байболотов Б.А., Маданбекова Э.Э., Усенбаева К., Орозбаева Н.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА С ПРИМЕНЕНИЕМ MAPLE

B.A. Baybolotov, E.E. Madanbekova, K. Usenbaeva, N. Orozbaeva

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE GALERKIN METHOD USING MAPLE

УДК: 518.5

Азыркы учурда илим менен техниканыны өнүгүп жаткан убагында, компьютердик программалоо дагы өсүп өнүгүп жатат. Убакыттын өтүшү менен жаңы программдык тилдер жана жабдыктар пайда болууда. Муну менен бирге компьютердик символдук математика дагы өнүгүүдө. Мисал катарында MathCad, Matlab, Maple, Latex ж.б.у.с программдык пакеттерди кароого болот. Maple татаал математикалык эсептөөлөргө, моделдештирүүгө жана берилиштерди визуалдаштырууга багытталган, Maple программасын мектеп окуучуларынан тартып илимий чөйрөдөгү бардык илимпоздор колдоно алышат. Мектеп математикасында колдонуу окуучулар үчүн көптөгөн жеңилдиктерди алып келет. Бул макалада интегралды табууга жана дифференциалдык теңдемелердин айрымдарын сандык методдор менен чыгарууга багытталган, дүйнөдөгү кеңири тараган программдык жабдыктардын бири Maple болгондуктан, кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн четик шарттагы маселелерди чечүүдөгү Галеркиндин ыкмасын колдонууга болорун көрсөттүк

Негизги сөздөр: *компьютер, Maple, символдук математика, Галеркиндин ыкмасы, четтик шарттар, дифференциалдык тендемелер, программалоо, жакындатып эсептөө, базистик функция.*

В наше время – время невиданного развития науки и техники, развивается и компьютерное программирование. Создаются новые и более мощные программные средства, и технологии. Вместе с этим развивается и компьютерная символьная математика. В качестве примера можно привести программные пакеты MathCad, Matlab, Maple, LaTex и т.д. Программный пакет Maple предназначен для проведения сложных математических расчетов, моделирования процессов и визуализации данных. Его могут использовать в различных сферах – от школьников в изучении школьных предметов до ученых в высоконаучных исследованиях различных направлений. В данной статье рассматривается применение всемирно распространенного программного средства Maple, которое также обладает возможностями для вычисления интегралов и численного решения некоторых дифференциальных уравнений, для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Галеркина.

Ключевые слова: *компьютер, Maple, символьная математика, метод Галеркина, краевые условия, дифференциальные уравнения, программирование, приближенные вычисления, базисная функция.*

In our time - a time of unprecedented development of science and technology, computer programming is also developing. New and more powerful software and technologies are being created. Along with this, computer symbolic mathematics is also developing. As an example, the software packages MathCad, Matlab, Maple, LaTex, etc. Maple software package is designed for complex mathematical calculations, process modeling and data visualization. It can be used in various fields - from students in the study of school subjects to scientists in highly scientific research in various fields. This article discusses the use of the worldwide Maple software, which also has the potential to calculate integrals and numerically solve some differential equations, to solve boundary problems for ordinary differential equations using the Galerkin method.

Key words: *computer, Maple, symbolic mathematics, Galerkin method, boundary conditions, differential equations, programming, approximate calculations, basic function.*

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

В настоящее время наука не стоит на одном месте, она развивается каждым днем, в том числе и языки программирования: развиваются интегрированые среды, основанные на алгоритмических языках, и растет применение универсальных пакетов компьютерной символьной математики как Maple, Mathematica, MatLab, MatCad и др. Эти системы имеют очень простой интерфейс, понятны для непрофессиональных пользователей, обеспечивают множество стандартных и специальных математических операций, обладают собственными языками программирования и оснащены отличными графическими средствами. Большая часть научно-исследовательской работы сводится к математическим задачам (таким, как равенства, неравенства, уравнения, дифференциальные и интегральные уравнения, системы уравнений и т.д.). Так как не все исследователи являются математиками и программистами, эти задачи оставались открытыми, в таких случаях нам помогут системы компьютерной символьной математики. Наиболее распространенной и удобной для применения является программная среда Maple. Программная среда предоставляет широкие возможности для эффективной работы специалистов разных профессий и даже школьников [1].

Покажем, как провести численное решение математической задачи посредством применения Maple.

Во многих научно-исследовательских и практических работах гидрогеологии используется так называемый метод Галеркина.

Рассмотрим конкретную краевую задачу

$$L[y] = f(x) \tag{1}$$

где

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

При заданных краевых условиях:

$$\Gamma_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A,$$

$$\Gamma_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{2}$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0).$$

Подбираем базисные функции

$\{u_i(x)\}$ $(i = 0, 1, ..., n)$, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_0] = A,\ \Gamma_b[u_0] = B$$

а функции $u_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ удовлетворяли однородным краевым условием:

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0,\ (i = 1, ..., n)$$

Решение задачи (1) - (2) будем искать в виде

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x) \tag{3}$$

При выборе базисных функций $u_i(x)$ функции *y*, определяемых формулой (3), учитываем, что функция *y* должна удовлетворять условиям (2) при любом выборе коэффициентов C_i. Формулу (3) подставим в дифференциальное уравнение (1), и получаем следующую *невязку*

$$R(x, C_1, C_2, ..., C_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^{n} C_i L[u_i] - f(x)$$

.

Чтобы получить точное решение *y*, $R \equiv 0$, а для получения приближенного решения, выгодно подобрать коэффициенты C_i так, чтобы функция *R* была в каком-то смысле очень мала.

Главным условием применения данного метода является то, что невязка *R* должна быть ортогональна к базисным функциям $u_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, для того, чтобы при достаточно большом числе этих функций, обеспечивать малость невязки и насколько можно, настолько приблизить решение к точному [2].

Таким образом, для определения C_i приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \int_a^b u_i(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_i(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx$$

$$(i = 1, 2, ..., n)$$

СЛАУ можно решить любым стандартным методом.

Пример. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения

$$y'' + xy' + y = 2x, \tag{4}$$

Удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 1,\ y(1) = 0 \ (5)$$

Построим программу приближенного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, дифференциальный оператор уравнения данной задачи $OL = y'' + xy' + y$, правая

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

часть $f = 2x$, а базисную функцию выберем $y(x) = x^n(x-1)$ [4].

>Galer:= proc(OL :: procedure, f :: procedure, phi :: procedure, x :: name, a :: numeric, b :: numeric, n :: numeric)
local y, i, eq, MA;
*y := phi(0, x)+sum(MA[i] * phi(i,x), i = 1 .. n);*
for i to n do
*eq||i:= sum(MA[k] * int(OL(phi(k,x),x) * phi(i,x), x=a..b), k=1..n)= int((f(x) - OL(phi(0, x), x))* phi(i, x), x = a..b); end do; eq:=solve({seq(eq||i,i=1..n)}, {seq(MA[i],i =1..n)}); assign(eq); simplify(eval(y)); end proc:*

Теперь необходимо создать процедуры для вычисления дифференциального оператора уравнения и базовых функций, а также задать выражение для правой части уравнения:

> L1:= proc(y,x) diff(y,x$2)+ xdiff(y,x)+ y; дифференциальный оператор *Lend proc:>f:=proc(x) 2*x;*

правая часть дифференциального уравнения *fend proc:*

> phi:=proc(n,x)(x)^n(1-x);* базисная функция *end proc:*

Все необходимые процедуры созданы, и можно переходить к построению приближенного решения:
> res1:=Galer(L1, f, phi, x, 0, 1, 1);

$$res1 := 1 - \frac{23}{18}x + \frac{5}{18}x^2$$

> res2: = Galer(L1, f, phi, x, 0, 1, 2);

$$res2 := 1 - \frac{377}{369}x - \frac{181}{369}x^2 + \frac{21}{41}x^3$$

Мы построили два приближенных решения, в которых содержится, соответственно, один и два члена решения. Посмотрим, как они согласуются с точным решением краевой задачи, а мы специально выбрали такую задачу, для которой возможно построение точного решения:

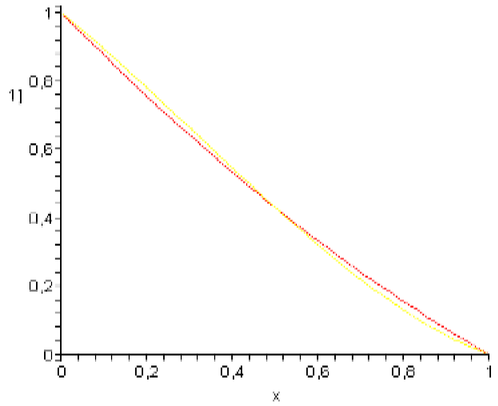
> yt: = expand((1 - x)(1 - 0.2090*x - 0.7894*x*x + +0.2090 * x ^ 3));*

$$yt := 1. - 1.2090\,x - 0.5804\,x^2 + 0.9984\,x^3 - 0.2090\,x^4$$

> toch := dsolve({diff(y(x), x$2) + diff(y(x), x) + y(x) = 2 x, y(0)=1, y(1)=0}, y(x));*

$$toch := y(x) = -\frac{\sin(x)\,(2+\cos(1))}{\sin(1)} + \cos(x) + 2\,x$$

> plot([res1, res2, rhs(toch)], x=0..1, linestyle[5, 3, 1]);



Показано, что приближенное решение, в котором указаны две базисные функции (n = 2), на графике совпадают с точным решением, и только первое приближение, график которого представлен пунктирной линией, несущественно отличается от точного.

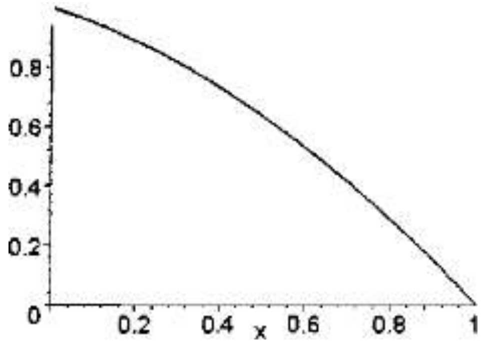
Рассмотрим следующую краевую задачу, где необходимо изменить функцию $\varphi_0(x)$, таким образом, чтобы она удовлетворяла новым краевым условиям. Если изменить граничные условия данной задачи, заменить на следующие:

$$u(0) = -1,\ u(1) = 0,$$

то можно получить функцию $\varphi_0(x) = (1-x)$. После этого следует изменить процедуру *phi ()* и построить приближенные решения следующим образом:

> phi: = proc(n, x)
x^n(1–x);*
end proc:
>resl: = Galer(LI,f, phi, x, 0, 1, 1);
> res2:= Galer(LI,f, phi, x, 0, 1, 2);
> exact : = dsolve({diff(y(x), x$2) + y(x) = – x, y(0)=1, y (1)= 0}, y (x));
plot([resl, res2, rhs(exact)], x=0..1, color = black, thickness=2, linestyle = [4,7,1]);

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557



Для этой задачи график уже первого приближения полностью совпадает с графиком точного решения.

Литература:

1. Говорухин В., Цибулин Б. Компьютер в математическом исследовании. - СПб: Питер, 2001. - С. 624.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1962.
3. Дьяконов В.П. Maple. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 607 с.
4. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. - М.: Просвещение, 2000. - 526 с.
5. Прохоров Г.В., Колбеев В.В., Желнов К.И., Леденев М.А. Математический пакет Maple V Release 4. - Калуга: “Облиздат”, 1998. - 195 с.