DOI:10.26104/IVK.2019.45

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 11, 2019

Искандаров С., Байгесеков А.М.

СЫЗЫКТУУ СЫМАЛ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖАРЫМ ОКТОГУ ГОРИЗОНТАЛДЫК АСИМПТОТАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Искандаров С., Байгесеков А.М.

О ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ АСИМПТОТЕ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛУОСИ

S. Iskandarov, A.M. Baigesekov

ON THE HORIZONTAL ASYMPTOTE OF THE SOLUTIONS OF VOLTERRA TYPE SECOND ORDER WEAKLY NONLINEAR INTEGRO- DIFFERENTIAL EQUATION ON THE SEMI-AXIS

УДК: 517.968.74

Экинчи тартиптеги сызыктуу сымал Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеменин жарым октогу чыгарылыштарынын чектелген пределге жана алардын биринчи туундуларынын нөлгө умтулуусунун жетиштүү шарттары аныкталат. Бул максатта В.Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, салмактык функциялар методу, жекече кесүү методу жана интегралдык барабарсыздыктар методу өнүктүрүлөт, Люстерник-Соболевдин леммасы колдонулат. Ошондой эле бул макалада табылган жетиштүү шарттар мурда салмактык жана кесүүчү функциялар методу менен алынган жетиштүү шарттардан айырмалуу экени көрсөтүлөт, башкача айтканда, жогоруда айтылган асимптотикалык касиеттер жарым октогу экинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелердин жаңы классынын чыгарылыштары үчүн орун алары көрсөтүлөт. Каралган экинчи тартиптеги сызыктуу сымал интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын аргументи чексиз өскөндө горизонталдык асимптотага ээ болуу шарттары автоматтык башкаруу теориясындагы кээ бир стабилизациялоо процесстерин прогноздоого пайдаланышы мүмкүн экендиги белгиленет. Иллюстративдик мисал тургузулат.

Негизги сөздөр: *сызыктуу сымалдык, интегро-дифференциалдык теңдеме, горизонталдык асимптота, жекече кесүү методу, салмактык функциялар методу, интегралдык барабарсыздыктар методу, Люстерник-Соболевдин леммасы.*

Устанавливаются достаточные условия стремления к конечным пределам решений и к нулю их первых производных слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра. С этой целью развиваются метод преобразования уравнений В.Вольтерра, метод весовых функций, метод частичного срезывания и метод интегральных неравенств, применяется лемма Люстерника-Соболева. А также показывается, что достаточные условия, полученные в этой статье, отличаются от тех достаточных условий, которые ранее установлены с помощью метода весовых и срезывающих функций, иначе говоря, показывается что выше перечисленные асимптотические свойства верны для решений новых классов интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси. Замечается, что условия наличия горизонтальной асимптоты при неограниченном возрастании аргумента решений рассматриваемого слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка могут быть использованы к прогнозированию некоторых процессов стабилизации из теории автоматического управления. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова: *слабая нелинейность, интегро-дифференциальное уравнение, горизонтальная асимптота, метод частичного срезывания, метод весовых функций, метод интегральных неравенств, лемма Люстерника-Соболева.*

Sufficient conditions for the tendency to finite limits of solutions and to zero of their first derivatives of a weakly nonlinear integro- differential equation of the second order of Volterra type are established. To this end, a method of transforming the equations of V. Volterra is being developed, weight function method, partial cutting method and integral inequality method, as well as the Lyusternik-Sobolev lemma. It is also shown that the sufficient conditions obtained in this article differ from those sufficient conditions that were previously established using the method of weight and cutting functions, in other words, it is shown that the above listed asymptotic properties are true for

DOI:10.26104/IVK.2019.45

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 11, 2019

solutions of new classes of Volterra-type integro-differential equations on the half shaft. It is noted that the conditions for the presence of a horizontal asymptote with an unlimited increase in the argument of the solutions of the considered weakly nonlinear integro-differential equation of the second order can be used to predict some stabilization processes from the theory of automatic control. An illiustrative example is given

Key words: *weak nonlinearity, integro-differential equation, horizontal asymptote, partial cutting method, weight function method, method of integral inequalities, Lyusternik-Sobolev lemma.*

Все фигурирующие функции от $t, (t,\tau)$ и их производные являются непрерывными и соотношения справедливы при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; функции от x, y, zнепрерывны при $|x|, |y|, |z| < \infty$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ-интегро-дифференциальное уравнение; под горизонтальной асимптотой решений линейного ИДУ второго порядка понимается их стремление к конечным пределам и к нулю их первых производных при $t \to \infty$.

ЗАДАЧА.Установить достаточные условия наличия горизонтальной асимптоты всех решений следующего ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x'(\tau)\,d\tau = f(t) +$$

$$+F\left(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau),x'(\tau)\,d\tau)\right), t \geq t_0 \qquad (1)$$

при выполнении условия «слабой нелинейности»:

$$|F(t,x,y,z)| \leq g_0(t)|x| + g_1(t)|y| + g_2(t)|z|,$$

$$|H(t,\tau,x,y)| \leq h_0(t,\tau)|x| + h_1(t,\tau)|y| \qquad \text{(SH)}$$

с неотрицательными $g_k(t), g_2(t), h_k(t,\tau)(k = 0,1)$.

Отметим, что в случае линейного ИДУ (в $(1) F(t,x,y) \equiv 0$) такая задача изучена в [1,2] развитием метода весовых и срезывающих функций [3]. В данной статье для решения выше поставленной задачи нами развивается другой метод, а именно метод частичного срезывания [4,5], что дает новые результаты даже для линейного ИДУ вида (1).

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^1(J,R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0,1)$. Как известно, в силу условия (SH) такие решения ИДУ (1) существуют.

Пусть [3,4]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t), \qquad (f)$$

$0 < \varphi(t)$ - некоторая весовая функция, $\psi_i(t)(i = 1 \dots n)$- некоторые срезывающие функции, $P_i(t) \equiv \varphi(t)K_i(t,t)\big(\psi_i(t)\big)^{-2}$,

$$Q_i(t,\tau) \equiv \varphi(t)K_i(t,\tau)\big(\psi_i(\tau)\big)^{-1}(i = 1 \dots n), E_i(t) \equiv \varphi(t)f_i(t)\big(\psi_i(t)\big)^{-1},$$

$$P_i(t) = A_i(t) + B_i(t)(i = 1 \dots n), \qquad \text{(P)}$$

$c_i(t)(i = 1 \dots n)$ - некоторые функции.

DOI:10.26104/IVK.2019.45

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ИДУ (1) умножаем на $\varphi(t)x'(t)$ [6], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом аналогично [3,4] вводим условия (K), (f), функции $\psi_i(t), P_i(t), Q_i(t,\tau)$ условие (P), функции$c_i(t) (i = 1 \dots n)$, используем лемму [4], леммы 1.4, 1.5 [7]. Тогда получаем следующее тождество:

$$u(t) \equiv \varphi(t)\left(x'(t)\right)^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta(s)\left(x'(s)\right)^2 ds + \varphi(t)a_0(t)\left(x(t)\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big\{A_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 + B_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) -$$

$$-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)\left(X_i(s,t_0)\right)^2 - 2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(s)]ds\Big\} \equiv c_* +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(\varphi(s)a_0(s)\right)'\left(x(s)\right)^2 ds + 2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q_{i\tau}'(s,\tau)\,X_i(\tau,t_0)x'(s)d\tau ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x'(s)F(s;x)ds, \qquad (2)$$

где $\Delta(t) \equiv 2\varphi(t)a_1(t) - \varphi'(t)$,

$$X_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x'(\eta)\,d\eta \quad (i = 1 \dots n), \qquad c_* = \varphi(t_0)\left(x'(t_0)\right)^2 +$$

$$+\varphi(t_0)a_0(t_0)\left(x(t_0)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}c_i(t_0),$$

$$F(t;x) \equiv F\left(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} H\left(t,\tau,x(\tau),x'(\tau)\right)d\tau\right).$$

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $\varphi(t) > 0$, выполняются условия (K), (f), (P);

2) $\Delta(t) \geq 0$; 3) $a_0(t) > 0$, существует функция $a_0^*(t) \in L^1(J,R_+)$ такая, что $(\varphi(t)a_0(t))' \leq a_0^*(t)\varphi(t)a_0(t)$; 4) $A_i(t) > 0$,существует функции $A_i^*(t) \epsilon L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t) \leq A_i^*(t)A_i(t) (i = 1 \ \dots n)$;

5) $B_i(t) \geq 0$, $B_i'(t) \leq 0$, существует функции $c_i(t)$ такие, что

$$\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t) (i = 1 \ \dots n;\ k = 0{,}1);$$

6)$\left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t}|Q_{i\tau}'(t,\tau)|\left(A_i(\tau)\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau \epsilon L^1(J,R_+)$; 7)$g_0(t)\left(a_0(t)\right)^{-\frac{1}{2}} + g_1(t) +$

$$+\left(\varphi(t)\right)^{\frac{1}{2}}g_2(t)\int_{t_0}^{t}\left[h_0(t,\tau)\left(\varphi(\tau)a_0(\tau)\right)^{-\frac{1}{2}} + h_1(t,\tau)\left(\varphi(\tau)\right)^{-\frac{1}{2}}\right]d\tau \in L^1(J,R_+).$$

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливы следующие утверждения:

DOI:10.26104/IVK.2019.45

$$\varphi(t)a_0(t)\big(x(t)\big)^2 = O(1), \tag{3}$$

$$\varphi(t)(x'(t))^2 = O(1), \tag{4}$$

$$\int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x'(s))^2 ds = O(1), \tag{5}$$

$$A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 = O(1)(i = 1\ \dots n) \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия 5) теоремы имеем, что

$$(-1)^{к}\left[B_i^{(k)}(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 - 2E_i^{(k)}(t)X_i(t,t_0) + c_i^{(k)}(t)\right] \geq 0 \tag{7}$$

$(k = 0{,}1;\ i = 1 \dots n)$.

Вводим обозначение:

$$V(t) \equiv \varphi(t)\big(x'(t)\big)^2 + \int_{t_0}^{s} \Delta(s)\big(x'(s)\big)^2 ds + \varphi(t)a_0(t)\big(x(t)\big)^2 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 \tag{8}$$

и с учетом (7) сможем написать:

$$0 \leq V(t) \leq u(t), \tag{9}$$

т.к. выполняются условия 1) – 4) теоремы.

Теперь используя условие (SH) и условия 3), 4) теоремы из тождества (2) будем получать следующее интегральное неравенство:

$$u(t) \leq c_* + \int_{t_0}^{t}\left[a_*(s) + 2g_0(s)\big(a_0(s)\big)^{-\frac{1}{2}} + 2g_1(s)\right]u(s)ds +$$
$$+2\int_{t_0}^{t}(u(s))^{\frac{1}{2}}\left\{(\varphi(s))^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{s}|Q'_{i\tau}(s,\tau)|\,(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}(u(\tau))^{\frac{1}{2}} +\right.$$
$$+\big(\varphi(s)\big)^{\frac{1}{2}}g_2(s)\int_{t_0}^{s}\left[h_0(s,\tau)\big(\varphi(\tau)a_0(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} +\right.$$
$$\left.\left.+h_1(s,\tau)\big(\varphi(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}}\right]\big(u(\tau)\big)^{\frac{1}{2}}d\tau\right\}ds. \tag{10}$$

Применяя к интегральному неравенству (10) лемму 1[6] и учитывая условия 3), 4), 6), 7) теоремы, будем иметь, что справедливы оценка:

$$u(t) \leq c_* \exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\left\{a_*(s) + 2g_0(s)\big(a_0(s)\big)^{-\frac{1}{2}} + 2g_1(s) +\right.\right.$$
$$+2\big(\varphi(s)\big)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{s}|Q'_{i\tau}(s,\tau)|\,\big(A_i(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}}d\tau + \big(\varphi(s)\big)^{\frac{1}{2}}g_2(s)\int_{t_0}^{s}\left[h_0(s,\tau)\big(\varphi(\tau)a_0(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} +\right.$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 11, 2019

$+h_1(s,\tau)\big(\varphi(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}}\Big]\ d\tau\Big\}ds\Big)\equiv M(c_*)<\infty.$

Отсюда согласно (9) вытекает, что $0\le V(t)\le M(c_*)$, из которой в силу условий 1) - 4) заключаем, что

$$\varphi(t)\big(x'(t)\big)^2\le V(t),\quad \int_{t_0}^{t}\Delta(s)\big(x'(s)\big)^2ds\le V(t),$$

$$\varphi(t)a_0(t)\big(x(t)\big)^2\le V(t),\qquad A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2\le V(t)(i=1\dots n),$$

что равносильно утверждением теоремы (4), (5), (3), (6) соответственно.

Из теоремы вытекают 2 следствия, которые приводятся ниже.

СЛЕДСТВИЕ 1.Если 1) выполняются все условия теоремы;

2) $(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\in L^1(J,R_+\backslash\{0\})$, то любое решение $x(t)$ ИДУ (1) стремится к конечному пределу $x(\infty)$. Если, кроме того, 3) $\varphi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$,то $x'(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

В самом деле, из теоремы следует (4), что дает:

$|x'(t)|\le (M(c_*))^{\frac{1}{2}}(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}$,из которой имеем: $x'(t)\in L^1(J,R)$, $x'(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Из $x'(t)\in L^1(J,R)$ получается, что $|x(\infty)|<\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.Если 1) выполняются все условия теоремы;

2) $\Delta(t)\ge\Delta_0>0$, $(\Delta(t))^{-1}\in L^1(J,R_+\backslash\{0\})$,то любое решение $x(t)$ИДУ (1) имеет горизонтальную асимптоту $x(\infty)$.

Действительно из утверждения (5) теоремы при $\Delta(t)\ge\Delta_0>0\Longrightarrow x'(t)\in L^2(J,R)$. Из$(\Delta(t))^{-1}\in L^1(J,R_+\backslash\{0\})$ аналогично теореме 2[1] будем иметь, что $x'(t)\in L^1(J,R)$, т.е. $|x(\infty)|<\infty$.Так как $x'(t)\in L^p(J,R)$ $(p=1,2)$, то по лемме Люстерника-Соболева [8, с. 393 − 394; 9] получаем, что $x'(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий теоремы решения ИДУ(1) с начальными данными из начального многообразия:

$$|x(t_0)|-(M(c_*))^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}>0$$

стремятся к ненулевым конечным пределам при $t\to\infty$.

Это получаем из

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}x'(s)ds\Longrightarrow|x(t)|\ge|x(t_0)|-\int_{t_0}^{t}|x'(s)|ds\ge|x(t_0)|-(M(c_*))^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}.$$

ПРИМЕР. ИДУ

$$x''(t)+3\big(\sqrt{t}+2\big)x'(t)+\frac{(t+1)e^{-4t}}{t+2}x(t)+$$

$$+\int_0^t e^{t+5\tau}[1+(t-\tau)e^{-20t}]^{\frac{1}{2}}x'(\tau)\,d\tau=-3e^t+\frac{|x(t)|sine^{-5t}}{(x'(t))^2+1}-$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45

$$-\frac{|x'(t)|e^{-4t}}{[|x(t)|+2](t^2+3)}-\int_0^t \frac{x(\tau)sinx(\tau)d\tau}{e^{5t}+e^{5\tau}+4}+\int_0^t \frac{e^{-4t}|x'(\tau)|cosx(\tau)}{(t+\tau+6)^3}d\tau, t\geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствий 1,2 при $\varphi(t)\equiv e^{4t}$, здесь $t_0=0$, $\Delta(t)\equiv 2(3\sqrt{t}+4)e^{4t}$, $\varphi(t)a_0(t)\equiv\frac{t+1}{t+2}$, $a_0^*(t)\equiv\frac{1}{(t+1)(t+2)}$,

$$n=1,\qquad \psi_1(t)\equiv e^{5t}, P_1(t)\equiv 1, A_1(t)\equiv\frac{1}{2},\qquad B_1(t)\equiv\frac{1}{2},$$

$$Q_1(t,\tau)\equiv e^{5t}[1+(t-\tau)e^{-20t}]^{\frac{1}{2}},\qquad E_1(t)\equiv -3, c_1(t)\equiv 18, g_0(t)\equiv e^{-t},$$

$$g_1(t)\equiv\frac{1}{t^2+3}, g_2(t)\equiv 1, h_0(t,\tau)\equiv\frac{1}{e^{5t}+e^{5\tau}+4}, h_1(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+6)^3}.$$

Таким образом, нам удалось найти класс слабо нелинейных ИДУ второго порядка вида (1), для которого решаема поставленная нами задача.

Заметим, что к выше приведенному примеру не применим метод весовых и срезывающих функций из [1] , т.к. $Q'_{1\tau}(t,\tau)<0$. Следовательно, результаты статьи [1] и настоящей работы, вообще говоря, не пересекаются. Также отметим, что результаты решения поставленной нами задачи могут быть использованы к прогнозированию некоторых процессов стабилизации с предысторией из теории автоматического регулирования.

Литература:

1. Искандаров С. Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1984. - Вып. 17. - С. 161-165.
2. Искандаров С., Байгесеков А.М. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси // Известия вузов Кыргызстана. - Бишкек, 2016. - №9. - С.3-8.
3. Искандаров С.Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. - Бишкек: Илим, 2002. - 216 с.
4. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2004. - Вып. 33. - С. 67-71.
5. Искандаров С., Асанова К.А. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. - 2016. - Том 16. - №9. - С. 12-15.
6. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. - Фрунзе: Илим,1973. - Вып. 9. - С. 68-103.
7. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс…докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. - Бишкек, 2003. - 34 с.
8. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука,1965. - 520 с.
9. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного Вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 44. - С. 44-51.