DOI:10.26104/IVK.2019.45

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 11, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Толубаев Ж.О., Сабиров Я.А., Холбеков Н.О.

БИРИНЧИ ТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ҮЧҮН БУЛАКТУУ БАШТАПКЫ ШАРТТАРДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛООЧУ ОПЕРАТОРДУ ТУРГУЗУУ

Толубаев Ж.О., Сабиров Я.А., Холбеков Н.О.

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА ИСТОКОПРЕДСТАВИМЫМ ИСХОДНЫМ ДАННЫМ

Zh.O. Tolubaev, Ya.A. Sabirov, N.O. Kholbekov

CONSTRUCTION OF A REGULARIZATION OPERATOR FOR SOLVING A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND BY SOURCIOUS REPRESENTATIVE DATA

УДК: 517.68

Бул макалада Гилберт мейкиндигиндеги биринчи типтеги сызыктуу эмес интегралдык теңдеме изилденген. Болжолдуу чечимди куруу үчүн Лаврентьев методу колдонулат. Лаврентьев ыкмасы булактуу, так чечимдерге колдонулган. Биринчи типтеги сызыктуу эмес интегралдык теңдеме сызыктуу эмес функциялардын баштапкы классы менен изилденет жана чечим табуу үчүн ырааттуу жакындоо ыкмасы колдонулат. Бул чечим Липшицтин шарттарын канаатандырат, бул математикалык индукция ыкмасы менен далилденет. Гилберт мейкиндигиндеги биринчи типтеги сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин болжолдуу жана так чечимдеринин ортосунда бааланат. Биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин ядросу симметриялуу, оң аныкталган жана үзгүлтүксүз. Гилберт мейкиндигиндеги биринчи типтеги сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечиминин жакындаштырылышы изилденген. Болжолдуу чечимдин баштапкы теңдеменин так чечимине жакындашуусу далилденди. Болжолдуу чечим оң жагына жакын жерде курулган.

Негизги сөздөр: *интегралдык теңдеме, сызыктуу эмес оператор, ченөөчү оператор, тескери оператор, Липшиц шарттары, параметр, нөлгө жакындоо, оператордук теңдемелер, сызыктуу эмес оператордук теңдемелер.*

В работе исследовано нелинейное интегральное уравнение первого рода в Гильбертовом пространстве. Для построения приближенного решения применен метод Лаврентьева. Метод Лаврентьева применена истокопредставимым точным решениям. Нелинейное интегральное уравнение первого рода исследуется с истокопредставимым классом нелинейной функции и для нахождение решение применяется метод последовательных приближений. Решение удовлетворяет условию Липщица, это доказанна по методу математической индукции. Получена оценка между приближенными и точными решениями нелинейного интегрального уравнения первого рода в Гильбертовом пространстве. Ядро нелинейного интегрального уравнения первого рода является симметричным, положительно определенным и непрерывным. Исследовано скорость сходимости решение нелинейного интегральногь уравнение первого рода в Гильбертовом пространстве. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения при $\alpha \to 0$. *Построено приближенное решение в* α *окрестности точной правой части* u_0.

Ключевые слова: *интегральное уравнение, нелинейный оператор, регуляризующий оператор, обратный оператор, условия Липшица, параметр, нулевое приближение, операторные уравнения, нелинейное операторные уравнения.*

In the work, a nonlinear integral equation of the first kind in a Hilbert space is investigated. To construct an approximate solution, the Lavrentiev method is used. The Lavrentiev method has been applied to sourceable, exact solutions. A nonlinear integral equation of the first kind is studied with the source class of a nonlinear function, and the method of successive approximations is used to find a solution. The solution satisfies the Lipschitz condition; this is proved by the method of mathematical induction. An estimate

DOI:10.26104/IVK.2019.45

is obtained between approximate and exact solutions of a nonlinear integral equation of the first kind in a Hilbert space. The kernel of a nonlinear integral equation of the first kind is symmetric, positive definite, and continuous. The convergence rate of a solution to a nonlinear integral equation of the first kind in a Hilbert space is investigated. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation for is proved. An approximate solution is constructed in a neighborhood of the exact right-hand side.

Key words: *integral equation, nonlinear operator, regularizing operator, inverse operator, Lipschitz conditions, parameter, zero approximation, operator equations, nonlinear operator equations.*

Регуляризирующий оператор для решения линейно интегрального уравнения первого рода построен в работе Лаврентьева М.М.

Оценка между приближенными и точными решениями получена в работе Иванова В.К.

Построению регуляризирующего оператора для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода вида:

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds = u(t) + \int_0^1 K_1(t,s)M\left(s,z(s)\right)ds \tag{1}$$

Методом Лаврентьева М.М., истокопредставимым точным решениям посвящена работа Саадабаева А.[1].

В данной работе уравнение (1) исследуется с истокопредставимым классом нелинейной функции, т.е. функция M(s,z(s)) представимо в виде:

$$M\left(s,z(s)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(s)}{\lambda_j^{\sigma+1.5}} \int_0^1 M_1\left(\nu,z(\nu)\right)\varphi_j)d\nu \tag{2}$$

где 0<σ<1, $M_1(\nu$,z(ν)) - непрерывная функция в области R: {0<v< 1, -∞ <z< ∞ } и удовлетворяет условию Липшица по zт.е

$$K_1(t,s) = \int_0^s K\,(t,\nu)d\nu \tag{3}$$

Учитывая равенство (3) уравнения (1) запишем в виде:

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds = u(t) + \int_0^1 \int_0^s K\,(t,\nu)M\left(s,z(s)\right)d\nu ds \tag{4}$$

где

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \tag{5}$$

Используя (2) и (5), из (4) имеем:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k} z(s)ds = u(t) + \int_0^1 \int_0^s \frac{\varphi_k(\nu)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(s)}{\lambda_j^{\sigma+1.5}} \int_0^1 M_1\left(\nu,z(\nu)\right)\varphi_j(\nu)d\nu ds d\nu =$$
$$u(t) + \int_0^1 \int_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_{kj}^{\sigma+1.5}} M_1(\nu,z(\nu))dsd\nu$$

$$\text{где} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_k\,(n)\varphi_j(n) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

Меняем порядок интегрирования в (5), имеем:

DOI:10.26104/IVK.2019.45

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k} z(s)ds = u(t) + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1,5}} M_2\big(s, z(v)\big)ds \qquad (6)$$

$$\text{где } M_2\big(s, z(v)\big) = \int_0^1 M_1\left(v, z(z)\right)dv$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида:

$$\alpha z(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) = u(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1,5}}\varphi_k(t) \qquad (7)$$

$$\text{где } z_k = \int_0^1 z(s)\,\varphi_k(s)ds \;\;,\;\; M_k = \int_0^1 M_2(s, z\,(v)\varphi_k(s)ds$$

Обе части (7) умножим на функцию $\varphi_{ή}(t)$ и интегрируем от 0 до 1 и учитывая ортонормированность собственных функций $\varphi_{ή}(t)$, получаем:

$$\alpha z_k = u_k - \frac{z_k}{\lambda_k} + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1.5}} \qquad (8)$$

Подставляю последнее значение z_k в (7) имеем:

$$z_a(t) = \frac{u(t)}{a} - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k\varphi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+0.5}(1+\alpha\lambda_{k)}} \qquad (9)$$

Покажем, что линейная функция справа (9) удовлетворяет условию Липщица.

Действительно:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k{}^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\int_0^1 M_2\left(s, z_2(s)\right)\varphi_k(s)ds\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k{}^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\int_0^1 M_2\big(s, z_1(s)\big)\varphi_k(s)ds\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k{}^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\int_0^1 M_2\left(s, z_2(s)\right) - M_2\big(s, z_1(s)\big)\varphi_k(s)\,ds\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k{}^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\right)^2 \left(\int_0^1 M_2\left(s, z_2(s)\right) - M_2\big(s, z_1(s)\big)\varphi_k(v)\,dv\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^2{}_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\le K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}Na^{\sigma-1}\|z_{2-}z_1\|$$

$$K_0 = \max_{0\le t\le 1}|K(t,t)|\,, \left|M_2\big(s, z_2(s)\big) - M_2\big(s, z_1(s)\big)| \le N||z_2 - z_1|\right|,$$

$$\text{где } \frac{1}{\lambda_k{}^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)} \le (1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}a^{\sigma-1}$$

Нелинейное уравнение (9) решаем методом последовательных приближений.

DOI:10.26104/IVK.2019.45

За нулевое приближение возьмём элемент

$$\tilde{z}_0(t) = \frac{u(t)}{\alpha} - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+a\lambda_k} \quad (10)$$

Остальные приближение определяется по формуле:

$$z_1(t) = z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{\sigma}{}_k(1+a\lambda_k}\int_0^1 M_2(s, z_{j-1}(s))\varphi_k ds\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \quad (11_j)$$

Таким образом, по формуле (11_j) построены последовательные приближение

$\{z_j\}^{\infty}{}_{j=0}$.

Построим функциональный ряд.

$$\widetilde{z_0}(t) + [z_1(t) - \widetilde{z_0}(t)] + \cdots + [z_j(t) - z_{j-1}(t)] + \cdots \quad (12)$$

Для нулевого приближение при α>0 справедливо неравенство [1]

$$\widetilde{z_0}(t) \le \frac{1}{a^{3/2}}(1+\frac{K_0}{2})\|u(t)\|$$

Полагая j=2 и j=1 в (11j) и вычитая имеем:

$$|z_2(t) - z_1(t)| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{\sigma}{}_k(1+a\lambda_k)}\int_0^1 M_2(s, z_1(s)) - M_2(s\tilde{z}_0\varphi_k(s)ds)\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}$$
$$\le K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}a^{\sigma-1}N\|z_1(s) - \tilde{z}_0(s)\|$$

По методу математической индукции можно сказать, что j≥2∈ N справедливо неравенство:

$$|z_j(t) - z_{j-1}(t)| \le (K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}a^{\sigma-1}N)^{j-1}\|z_1(s) - \tilde{z}_0(s)\|$$

Используя (11_1) из (11_j), имеем

$$|z_j(t) - z_{j-1}(t)| \le (K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}a^{\sigma-1}N)^j\left(\|\tilde{z}_0(s)\| + \frac{M_0}{N}\right) \quad (13)$$

Таким образом, функциональный ряд (13) мажорируется следующим числовым рядом:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}a^{\sigma-1}N)^j\,\|z_0(s)\|\,\frac{M_0}{N}\sum_{j=0}^{\infty}(K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}a^{\sigma-1}N)^j \quad (14)$$

Пусть выполняется следующие условие $q = (K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}Na^{\sigma-1} < 1$, тогда числовой ряд (14) сходится. Следовательно, функциональный ряд (18) сходится абсолютно и равномерно. Сумма $z_j(t)$ по построению удовлетворяет условию:

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{z_j}\,(\mathrm{t}) = z_a(t)$$

В (11j) переходя к пределу при j→∞ и используя непрерывность функции $M_2(s, z)$, имеем:

DOI:10.26104/IVK.2019.45

$$z_a(t) = \tilde{z_0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{\lambda_k}^{\sigma}} \int_0^1 M_2\big(s, z_a(s)\big)\varphi_k\,(s)ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{15}$$

В силу (15) для $z_a(t)$ справедливо оценка $\|z_a\| \le \frac{1}{1-q}\|\tilde{z}_0(t)\| + \frac{M_0}{N}\frac{1}{1-q}$

Теорема 1. Пусть:

1) *Ядро K(t,s) –является симметричным положительно определенно непрерывным в квадрате 0≤t,s≤1.*

2) $K_1(t,s)$ - *удовлетворяет равенству (3)*

3) *Функция M(s,z(s)) представимо в виде (2),* $M_1(v, z(v))$ *непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липщица.*

4) *Постоянная* $q = K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}Na^{\sigma-1} < 1$

Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $z_a(t)$.

Через $\tilde{z}_a(t)$ обозначим решение уравнения (4) при u(t)=$u_0(t)$ т.е.

$$z_a^0(t) = z_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\sigma}(1+a\lambda_k)} \int_0^1 M_2\,(s, z_a^0(s))\varphi_k ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{16}$$

Предположим, что при u(t)=$u_0(t)$ существует точное решение $z_0(t)$ уравнения (1).

Тогда точное решение $z_0(t)$ в силу (9) представимо в виде:

$$z_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_{0_k}\,\varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{M_2(s, z_0(s))}{\lambda_k^{\sigma}} \varphi_k ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{17}$$

Из тождества (16) вычтем (17), имеем

$$z_a^0(t) - z_0(t) = \tilde{z}_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_{0_k}\,\varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\sigma}(1+a\lambda_k)} \int_0^1 M_2\left(s, z_a^0(s)\right) x\varphi_k ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 M_2\left(s, z_0(s)\right) x\varphi_k(s) ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{18}$$

Функция удовлетворяет тождеству

$$u_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{0_k}}{\lambda_k}\varphi_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\sigma+1}} \int_0^1 M_2\left(s, z_a^0(s)\right) x\varphi_k ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{19}$$

Отсюда

$$u_{0_k} = \frac{z_{0_k}}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k^{\sigma+1}} \int_0^1 M_2\left(s, z_0(s)\right)\varphi_k(s) ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{20}$$

Преобразуя (18) имеем:

$$z_a^0(t) - z_0(t) = \frac{u_0(t)}{\alpha} - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} u_{0_k}\,\varphi_k(t) - \alpha\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 u_{0_k}}{(1+a\lambda_k)}\varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a\lambda_k)\lambda_k^{\sigma}} \times \int_0^1 M_2\left(s, z_a^0(s)\right) x\varphi_k ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 M_2\left(s, z_0(s)\right) x\varphi_k(s) ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21) имеем

DOI:10.26104/IVK.2019.45

$$z_a^0(t) - z_0(t) = -\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 z_{0_k}}{(1+\alpha\lambda_k)} \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha\lambda_k)\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 M_2\left(s, z_a^0(s)\right) - M_2\left(s, z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \quad (22)$$

Оценим каждый член справа в (22). Допустим, что точное решение $z_0(t)$ истокообразно представимо в виде:

$$z_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{0_k} \varphi_k(t)}{\lambda_k^{p+1.5}} \quad (23)$$

$$\text{где } \varphi_{0_k} = \int_0^1 \varphi_0(s)\varphi_k(s)ds, \varphi_0(s) \epsilon L_2[0,1], \qquad 0 < p < 1$$

Используя (23), имеем

$$\left| -\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{0_k} \varphi_k(t)}{\lambda_k^{p}(1+\alpha\lambda_k)\sqrt{\lambda_k}} \right| \le \alpha^p K_0 (1-p)^{(1-p)} p^p \|\varphi_0\| \quad (24)$$

Второе слагаемое удовлетворяет неравенству:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\sigma}(1+\varphi\alpha\lambda_k)} \int_0^1 M_2\left(s, z_\alpha^0(s)\right) - M_2\left(s, z_0(s)\right)\varphi_k(s)ds \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \le K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma} N \alpha^{\sigma-1} |z_a^0(s) - z_0(s)| \quad (25)$$

Используя (24) и (25) из (22) имеем:

$$|z_a^0(t) - z_0(t)| \le R_1\alpha^p + R_2\alpha^{\sigma-1}|z_a^0(s) - z_0(s)| \text{ где } R_1 = K_0(1-p)^{1-p}p^p|\varphi_0|, R_2 = K_0(1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma} N \quad (26)$$

Учитывая неравенство (13) из (26) имеем:

$$z_a^0(t) - z_0(t) \le \frac{R_1\alpha^p}{1 - R_2\alpha^{\sigma-1}} \quad (27)$$

Теорема 2: *Пусть:*

1) *Выполнены все условия теоремы 1*
2) *При u(t)=u$_0$(t) уравнение имеет истокопредставимое точное значение*

Тогда решение уравнения (11) при *u(t)=u$_0$(t), при α→0 сходится к точному решению исходного уравнения. Скорость сходимости удовлетворяет условию (27).*

Литература:

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М: Наука, 1965.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М: Наука, 1977.
3. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
4. Саадабаев А.С. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. - Бишкек, 1997.