DOI:10.26104/IVK.2019.45

Садыкова Г.К.

БИР ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨ

Садыкова Г.К.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

G.K. Sadykova

INVESTIGATIONS OF SOLUTIONS TO A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DIVERSITIES OF THE FIRST ORDER

УДК: 517.968

Биринчи тартиптеги, жекече туундулуу сызыктуу эмес эки дифференциалдык тендемелердин системасынын бир учуру үчүн Коши маселеси каралган. Маселенин чечимин изилдөөдө буга чейин белгилүү болгон жана кеңири колдонулуп жаткан кошумча аргумент кийирүү усулу деп аталган усул колдонулган. Бул учурга чейин каралган системаларда жекече туундулардын коэффициенттери бир гана белгисиз функциядан көз каранды болушкан. Биздин учурда жекече туундулардын коэффициенттери эки белгисиз функциядан көз каранды. Жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык тендемелер системасынын чечимин кошумча аргумент киргизүү усулу менен тургузуу каралган. Кошумча аргумент кийирүү усулун сызыктуу эмес теңдемелер системасынын жаңы учуруна жайылтуу сунушталып жаткан иштин актуалдуулугун аныктайт. Маселенин чечимин изилдөөдө $\overline{C}^{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$ *жана Lip(N|*$_u$*,M|*$_v$*,…) функциялардын классытары колдонулду. Жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык тендемелер системасын оператордук түрдө жазып алып, кээ бир өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен каралган маселенин чечиминин жалгыздыгы далилденди.*

Негизги сөздөр: *дифференциалдык теңдемелер, системасы, сызыктуу эмес, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү усулу, оператор, кысып чагылтуу.*

Рассмотрена задача Коши для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. При исследовании решения задачи использовался известный и широко применяемый так называемый метод дополнительного аргумента. В рассмотренных до сих пор системах коэффициенты частных производных зависели только от одной неизвестной функции. В нашем случае коэффициенты частных производных зависят от двух неизвестных функций. Рассмотрено построение решения системы нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента. Применение метода дополнительного аргумента к новому случаю системы нелинейных уравнений определяет актуальность предлагаемой работы. При исследовании решения задач использовались классы функций $\overline{C}^{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$*, Lip(N|*$_u$*,M|*$_v$*,…). Записывая систему нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных в операторном виде и используя преобразования, была доказана единственность решения задачи.*

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, нелинейное, частные производные, метод дополнительного аргумента, вектор-функции, оператор, сжатое отображение.*

There was considered the Cauchy problem for one systems of nonlinear partial differential equations of the first order. The well-known and widely used method of additional argument was used to study the solution of this problem. In the systems considered before the coefficients of partial derivatives depended only on one unknown function. In our case, the coefficients of partial derivatives depend on two unknown functions. The construction of a solution to a system of nonlinear integro - differential partial differential equations by the method of an additional argument is considered. The application of the additional argument method to a new case of a system of nonlinear equations determines the relevance of the proposed work. In the study of problem solving, classes of functions $\overline{C}^{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$ *, Lip(N|*$_u$*,M|*$_v$*,…) were used. Writing a system of nonlinear integro - partial differential equations in operator form and using transformations, and the uniqueness of the problem solution was proved.*

Key words: *system of the differential equations, nonlinear, partial derivatives, additional argument method, vector-functions, operator, compressed map.*

DOI:10.26104/IVK.2019.45

Задачей этой работы является решение системы дифференциальных уравнений в частных производных в нижеследующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + a(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x))\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = a(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x)) + f(t) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + b(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x))\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x)) \end{cases} \quad (1)$$

$$(t,x) \in Q_1(T),$$

$$Q_m(T) = \{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x) \big| \; 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m \le T, \; x \in R\};$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x) = x, \quad u_2(0,x) = \varphi(x), \; x \in R. \quad (2)$$

Используя пространства функций $C(\Omega), C^{(k)}(\Omega)$, $Lip(N|_u, M|_v, \ldots)$ из работ [1-3], докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi(x) \in Lip(L), \quad L > 0 - const,$

$a(t,x,u_1.u_2), b(t,x,u_1.u_2), g(t,x,u_1,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T) \times R^n).$

Тогда при $0 < T_* \le T$ задача (1)-(2) имеет решение в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство функций $q(s,\tau,x) \in \overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T))$ для которой $q(s,\tau,x) - x \in \overline{C}^{(1)}(Q_2(T))$ обозначим через $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T)).$

Для решения поставленной задачи применяется так называемый метод дополнительного аргумента (МДА).

Применяя МДА для первого уравнения системы (1), получаем:

$$u_1(t,x) = x - \int_0^t a(\nu, q(\nu,t,x), u_1(\nu, q(\nu,t,x)), u_2(\nu, q(\nu,t,x)))d\nu +$$

$$+ \int_0^t a(\nu, q(\nu,t,x), u_1(\nu, q(\nu,t,x)), u_2(\nu, q(\nu,t,x)))d\nu + \int_0^t f(s)ds, \quad (3)$$

где

$$q(s,t,x) = x - \int_s^t a(\nu, q(\nu,t,x), u_1(\nu, q(\nu,t,x)), u_2(\nu, q(\nu,t,x)d\nu,$$

Из (3) имеем

$$u_1(t,x) = x + \int_0^t f(s)ds.$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45

Введем следующие обозначения:

$$B(t,x,u_2(t,x)) = b(t,x,x+\int_0^t f(s)ds,u_2(t,x)),$$

$$G(t,x,u_2(t,x)) = g(t,x,x+\int_0^t f(s)ds,u_2(t,x)).$$

Тогда из второго уравнения системы (1) получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = G(t,x,u_2(t,x)) \tag{4}$$

Решаем задачу (4)-(2) методом дополнительного аргумента (МДА), используя результаты работ [1,2].

Следовательно, имеем систему интегральных уравнений (с.и.у.), которая эквивалентна задаче (4)-(2):

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^t G(\nu,p(\nu,t,x),u_2(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \tag{5}$$

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t B(\nu,p(\nu,t,x),u_2(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \tag{6}$$

$$(s,t,x) \in Q_2(T),$$

в пространстве $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T)) \times \overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*)$.

Пусть $u_2(t,x), \quad p(s,t,x)$ - решение с.и.у. (5), (6).

Дифференцируя (5), (6), покажем, что $u_2(t,x)$ является решением задачи (1)-(2):

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = \varphi'(p(0,t,x))\left[\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial t} + B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial x}\right] +$$

$$+\int_0^t \left[G_x + G_{u_2}u_{2x}\right]\left[\frac{\partial p(\nu,t,x)}{\partial t} + B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial p(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu +$$

$$+G(t,x,u_2(t,x)), \tag{7}$$

$$\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial t} + B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x} = -\int_s^t \left[B_x'(t,x,u_2(t,x)) + B_u'(t,x,u_2(t,x))u_{2x}'(t,x)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial p(\nu,t,x)}{\partial t} + B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial p(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu, \tag{8}$$

Для $B(t,x,u_2) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R)$ из (8) имеем

DOI:10.26104/IVK.2019.45

$$\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial t}+B(t,x,u_2(t,x))\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x}=0,\quad p(s,s,x)=x,\quad (s,t,x)\in Q_2(T).$$

Тогда из (7) получается второе уравнение системы (1).

С.и.у. (5), (6) имеет единственное решение.

Преобразуем и.у. (6).

В системе и.у. (5), (6) [см.1,2] заменяем x на $p(t,\tau,x),\quad \tau\ge t,$ затем учитывая «тождество транзитивности»:

$$p(s,t,q(t,\tau,x))=p(s,\tau,x),\quad (s,t,\tau,x)\in Q_3(T),$$

имеем:

$$\omega(t,\tau,x)=\varphi(p(0,\tau,x))+\int_0^t G(\nu,p(\nu,\tau,x),\omega(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{9}$$

$$p(s,\tau,x)=x-\int_s^\tau B(\nu,p(\nu,\tau,x),\omega(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{10}$$

где обозначено

$$\omega(s,\tau,x)=u_2(s,p(s,\tau,x)) \tag{11}$$

С.и.у. (9), (10) при t=τ совпадает с с.и.у. (5), (6). Согласно (11) получается

$$\omega(t,t,x)=u_2(t,x).$$

Следовательно, исчерпывающим является доказательство существования решения с.и.у. (9), (10).

С.и.у. (9), (10) имеет вид: (см. [1,2]).

$$\theta(s,\tau,x)=A(s,\tau,x;\theta), \tag{12}$$

где $\theta=(\theta_0,\theta_1)$, $\theta_0=p(s,\tau,x),\ \theta_1=\omega(s,\tau,x)$,

а оператор $A=(A_0,A_1)$:

$$A_0(s,\tau,x;\theta)=x-\int_s^\tau B(\nu,\theta_0(\nu,\tau,x),\theta_1(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{13}$$

$$A_1(s,\tau,x;\theta)=\varphi(\theta_0(0,\tau,x))+\int_0^s G(\tau,\theta_0(\nu,\tau,x),\theta_1(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{14}$$

В рассматриваемом пространстве $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T))\times\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*)$ рассмотрим метрику:

$$\rho(\theta^1,\theta^2)=\max\left\{\sup\left\{\left|\theta_i^1(s,\tau,x)-\theta_i^2(s,\tau,x)\right|:(t,x)\in Q_2(T_*)\right)\right\}:i=0,1\right\}. \tag{15}$$

Воспользуемся обозначением: $\theta_x=(x,0)\in\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*))\times\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*)).$

DOI:10.26104/IVK.2019.45

Пусть: $M = \max\{\|B\|T, \max\{\|\varphi\| + \|G\|_n T\}\}.$

Тогда:

$$\rho(A(\theta), \theta_x) \le \max\{\|B\|T, \max\{\|\varphi\| + \|G\|T\}\} = M.$$

Мы должны доказать, что с.и.у. (12)-(13)-(14) имеет единственное решение в $S(\theta_x, M)$ при $T_* \le T.$

Имеем:

$$\left|A_0(\theta^1) - A_0(\theta^2)\right| \le (N_0 + N_1)T_* \left\|\theta^1 - \theta^2\right\|_n,$$

$$\left|A_1(\theta^1) - A_1(\theta^2)\right| \le \Omega(T_*) \left\|\theta^1 - \theta^2\right\|_n,$$

где

$$\Omega(T) = (L + \sum_{k=0}^{1} M_k)T,$$

$$G(t, x, u_2) \in Lip(M_0\big|_x, M_1\big|_{u_2}),\ M_0, M_1 > 0 - const,$$

$$B(t, x, u_2) \in Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_n}),\ N_0, N_1 > 0 - const.$$

Следовательно, получаем сжатое отображение шара $S(\theta_x, M)$ на себя, где

$$T_* = \min\{T, 1/(N_0 + N_1); 1/(L + \sum_{k=0}^{1} M_k)\}.$$

Теорему доказали.

Литература:

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. - Бишкек: Илим, 2013. - 134 с.
2. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными // Междун. научно-исследовательский журнал. 2018. - №3(69). - С. 6-10.
3. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Abstracts of Third International Scientific Conference «Actual problems of the theory of control, topology and operator equations» Bishkek, Cholpon-Ata, 19-22 June, 2017/ Ed. by Academician A. Borubaev. - P. 61.