DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Сражидинов А.

ФЕРМАНЫН УЛУУ ТЕОРЕМАСЫН 3-КӨРСӨТКҮЧҮ ҮЧҮН ЭЛЕМЕНТАРДЫК ДАЛИЛДӨӨ

Сражидинов А.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ 3

A. Srazhidinov

THE ELEMENTARY PROOF OF FERMAT'S GREAT THEOREM FOR EXPONENT 3

УДК: 511.521

Макалада Ферманан теоремасы жеке учурда – көрсөткүчү 3 болгондо элементардык жол менем далилденди, максатыбыз теореманын көрсүтүлгөн учурунда мектеп окуучуларына жалпы түшүнүктүү кылуу аркылуу алардын математикага болгон кызыгуусун арттыруу. Математикада Ферманын улуу теоремасы деп даңкталып аталышынын себеби: 1) анын формулировкасынын жалпыга маалым болушу, көркөм айтылышы жана кыскалыгы; 2) 1995-жылга чеин 350дөй жыл бою анын жалпы учурда далилденбей келиши. Сунуштаган далилдөө мектеп математикасындагы жалпы түшүнуктөр, жыйнтыктар пайдаланды. Жаны түшүнүк катарында жалгыз гана сандар жуптугунун көрсөткүчү келтирилди. Далилдөөнүн жогорку класстардын мектеп окуучуларына жеткиликтүү болушу аны факультативдик курстар программасына киргизип, проблеманын кызыктуу тарыхын чагылдырып өтсө болот. Анткени жогоруга айтылган Ферманын улуу теоремасынын формуливкасынын жөнөкөй жана так айтылышы, анткен менен далилдөөсүнүн оңой эместики көптөгөн – «ферматисттерди» чечкиндүүлүккө, алдамчылыкка, тобокелчиликке, азапка, кээде трагедияга алып келген.

Негизги сөздөр: *Ферма, улуу теорема, 3-көрсөткүчү, элементардык далилдөө, жөнөкөй сандар, сандардын тартиби, далилдөө методу.*

Заметка посвящена элементарному доказательству Великой теоремы Ферма в случае показателя 3, исключительно с целью сделать общем достояние учащихся старших классов. Тем самым в определенной мере у них проявить интерес к математике. Известная теорема, названная Великой теоремой Ферма, стала знаменитой по причинам: 1) ее формулировка общеизвестна, изящна и кратка; 2) до 1995 года в течение почти 350 лет теорема в общем случае не удалось доказать никому. В предлагаемом способе доказательства применены известные понятия и результаты в школьной математике, кроме понятия порядка четности чисел; способ вполне доступен ученикам старших классов, которые можно включить в программу факультативного курса с описанием интересной истории проблемы. Потому что, как было замечено выше, Великая теорема Ферма, которая сформулирована столь просто и ясно, продолжала так долго оставаться неприступной крепостью и служила примером захватывающей истории о смелости, мошенничестве, догадке и даже трагедии.

Ключевые слова: *Ферма, великая теорема, показатель 3, элементарное доказательство, простые числа, порядок чисел, метод доказывания.*

The note is devoted to the elementary proof of the Great Theorem Farm in case of exponent 3, solely for the purpose of making general property of students in high school eat to a certain extent with them show interest in math. A famous theorem called the Great Farmat's theorem became famous for reasons: 1) the wording is well known, elegant and concise, 2) until 1995 for almost 350 years the theorem in the general case did not. In the proposed method well-known concepts and results are applied in school mathematics in addition to the concept of parity of numbers: a way quite accessible to high school students which can be included in curriculum with an interesting story Problems. Because as noted above. The Great Fermat Theorem which is formulated so simply and clearly, lasted so long remaining an impregnable fortress and served as an example of spectacular stories of courage, fraud conjecture and even tragedy.

Key words: *Ferma, great theorem, exponent 3, elementary proof, Prime numbers, order of numbers, method of proof.*

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Данная заметка посвящена элементарному доказательству Великой теоремы Ферма [1] в частном случае n =3, и преследует цель – сделать доказательство при указанном порядке общим достоянием и для учащихся старших классов. Тем самым, возможно в определенной мере проявить у них интерес к самой древней науке – математике с удивительно строгой цепочкой логических рассуждений. Для этой цели эта теорема, на наш взгляд, является поучительным примером и из-за следующих предпосылок:

1. Формулировка теоремы общеизвестна (например, [1]) и тому же, изящна и довольно кратка;
2. До 1995 года [2] достаточно долгое время (почти 350 лет) теорема не поддалась доказательству никому. (Следует отметить, что в 1768 году Эйлер впервые доказал теорему в случае n=3).

Здесь невольно вспоминается история с известной теоремой Пифагора, которую впервые со всей строгостью доказал древнегреческий математик Пифагор в VI веке д.н.э., хотя это предположение было известно много тысячелетий до него вавилонским, индийским и китайским математикам [3].

Так же отметим что аналогичная цель затрагивалась и в работе [4] автора.

Начнем излагать содержание заметки. Итак, справедлива

Теорема. Уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 \tag{1}$$

при целых числах x,y и z, отличных от нуля, не имеет решений.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть при некотором наборе целых чисел x, y и z, отличных от нуля, имеет место равенство (1). Без ограничения общности, можно считать, что x, y и z взаимно простые числа, т.е.

$$D(x, y) = 1,\ D(x, z) = 1,\ D(y, z) = 1. \tag{2}$$

Тогда из равенства (1) следует, что одно из них четное, а две другие нечетные. Для определенности будем считать, что x и y нечетные, а z четное число, т. е. $x \equiv 2$, $y \equiv 2$, a ╥ $\equiv 2$.

Для краткости вместо слова «целое число» будем писать «число», если не подчеркнуты другие случаи.

Так же будем писать ω(z) = p, если существует некоторое натуральное число p такое, что $z \equiv 2^p$, z╥ $\equiv 2^{p+1}$.

Число ω(z) назовем порядком четности числа z.

По определению положим, что ω(v) = 0, если число v нечетное.

Теперь рассмотрим уравнение (1). Очевидно, имеем

$$-x^3 = (y + z)((y + z)^2 - 3yz),$$
$$-y^3 = (x + z)((x + z)^2 - 3xz),$$
$$-z^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy). \tag{3}$$

В равенстве (3) заметим, что все простые множители сумм $y + z$, $x + z$ и $x + y$ также являются множителями чисел x, y и z соответственно. Поэтому в силу (2) эти суммы то же являются взаимно простыми:

$$D(x + y, x + z) = 1,\ D(x + y, y + z) = 1,$$
$$D(x + z, y + z) = 1. \tag{4}$$

По этой же причине вторые множители (3) справа, так же являются взаимно простыми.

Далее, обозначим

$$U\, x + y + z. \tag{5}$$

Записав (5) в виде

$$u - z = x + y, \tag{6}$$

и возведя обе части (6) в куб, имеем

$$u^3 = z^3 - 3uz(u - z) = x^3 + y^3 + 3xy(x + y),$$

или отсюда с учетом равенства (1) и (5)

$$u^3 = 3(x + y)(xy + uz). \tag{7}$$

В силу (5) очевидно имеем

$$xy + uz = (x + y)(y + z),$$

и, следовательно, равенство (7) примет вид

$$u^3 = (x + y)(x + z)(y + z). \tag{8}$$

В равенстве (8) заключаем, что $u \equiv 3$.

Тогда согласно (4) только одна из сумм $x + y$, $x + z$ и $y + z$ кратна числу 3 (даже 9). Значить, возможны лишь следующие случаи:

$$\text{либо } x + y \equiv 3; \tag{9}$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

либо $x + z \equiv 3$; (10)

либо $y + z \equiv 3$. (11)

Но, случай (11) можно свести к случаю (10). Для этого достаточно поменять обозначения $x \leftrightarrow y$. Тогда в случаях (10) и (11) без ограничения общности, можем считать, что $x + z \equiv 3$.

Поэтому логически возможны два случая:

Либо случай I; т. е. выполняется равенство (9);

Либо случай II, т. е. имеет место соотношение (10).

В случае I из равенства (8) в силу(4) имеем

$$y + z = x_1^3,\ x + z = y_1^3,\ \ 3(x + y) = z_1^3, \qquad (12)$$

а в случае II -

$$y + z = x_1^3,\ 3(x + z) = y_1^3,\ \ \ x + y = z_1^3. \qquad (13)$$

В обеих случаях из равенства (8) следует, что

$$u^3 = x_1^3\, y_1^3\, z_1^3.$$

Отсюда $u = x_1 y_1 z_1$, т. е.

$$x + y + z = x_1 y_1 z_1, \qquad (14)$$

где числа x_1, y_1 и z_1 определяются равенствами (14) или (13) в случаях I или II соответственно.

Перепишем систему (3) в виде

$$x^3 = x_1^3\, x_2^3,\ y^3 = y_1^3\ y_2^3,\ z^3 = z_1^3\ z_2^3 \qquad (15)$$

где $x_2 = x / x_1$, $y_2 = y / y_1$, $z_2 = z / z_1$, то есть числа x_2, y_2, z_2 определяются в случае I равенствами

$$x_2^3 = 3yz - (y + z)^2,$$
$$y_2^3 = 3xz - (x + z)^2, \qquad (16)$$
$$z_2^3 = xy - (x + y)^2 /3;$$

а случае II -

$$x_2^3 = 3yz - (y + z)^2,$$
$$y_2^3 = xz - (x + z)^2/3, \qquad (17)$$
$$z_2^3 = 3xy - (x + y)^2.$$

Покажем, что x_1 и x_2 взаимно простые числа. В самом деле, если обозначить через L какое-либо их общий делитель, то первое равенство (16) (а также из (17)) следует, что на L делится произведение $3yz$.

Так как $x_1 \not\equiv 3$, то $L \equiv 3$, а $yz \equiv L$. Значит на L делится и $y\,z$, и сумма $y + z$. Отсюда вытекает, что на L делится и число y, и число z. Следовательно, в силу $D(y, z) = 1$, имеем $L = 1$.

В случае I аналогично получаем $D(y_1,y_2) = 1$. Рассмотрим числа z_1, z_2 в случае I.

Так как $D(x,y) = 1$ и $x + y \equiv 3$, тогда $xy \neq 3$ и число z_2^3 из (16) не делится на 3. Обозначим через L общий делитель чисел z_1 и z_2.

Тогда $L \not\equiv 3$ а сумма $x + y$ делится на число L т. е. $x + y \equiv L$. Поэтому xy не делится на L. Так как $z_2^3 = xy - (x + y)^2 /3$, то $z_2^{\,3} \not\equiv L$. Получаем противоречие с $L \neq 1$. Значит $L = 1$ и $D(z_1, z_2) = 1$.

Совершенно аналогично в случае II доказывается, что

$$D(x_1, x_2) = 1,\ D(y_1, y_2) = 1,\ D(z_1, z_2) = 1.$$

Теперь воспользуемся очевидным тождеством

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \qquad (18)$$

Справедливым для всех действительных чисел a,b и c. Тождество (18) при замене a,b и c соответственно на x, y и z из уравнения (1), получаем равенство

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = -3xyz \quad (19)$$

В силу равенств (14) и (15) из последнего равенства (19) получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = -3x_2y_2z_2, \qquad (20)$$

Из равенства (20), производя очевидные преобразования, получаем:

$$(x + y)^2 - 3xy - z(x + y) = -3x_2y_2z_2,$$
$$(x + y)^2 - z(x + y) = 3(xy - x_2y_2z_2),$$
$$(x + y)^2 - z(x + y) = 3x_2y_2(x_1y_1 - z_2). \qquad (21)$$

Так как $z = z_1z_2$ и в обеих случаях I и II числа z_2 нечетное, то

$$\omega(z) = \omega(z_1) + \omega(z_2) = \omega(z_1), \text{ т.е.}$$
$$\omega(z) = \omega(z_1),\ \omega(z_1) = p,\ p \geq 1. \qquad (22)$$

Учитывая $x + y = z_1^3/3$, получаем

$$\omega(x + y) = 3p.$$

Определим порядок каждого члена левой части (21):

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$\omega ((x + y)^2) = 2\omega (x + y) = 2 * 3p = 6p,$

$\omega (z(x + y)) = \omega (z) + \omega (x + y) = p + 3p = 4p.$

Поэтому с учетом $6p > 4p$ получаем, что

$\omega ((x + y)^2 - z(x + y)) = 4p.$ (23)

Так как $\omega (3x_2y_2(x_1y_1 - z_2)) = \omega (x_1 y_1 - z_2),$ то из равенств (21) и(23) заключаем что

$\omega (x_1 y_1 - z_2) = 4p.$ (24)

Ниже покажем, что соотношение (24) приводит к противоречию.

Сначала рассмотрим случай I. Очевидно, что

$x + x_1^3 = u, y + y_1^2 = u, z + z_1^3/3 = u,$ или одно и тоже

$x_1^3 = y + z, y_1^3 = x + z, z_1^3/3 = x + y.$ (25)

Так как

$x_1^3y_1^3 - z_2^3 = (x_1 y_1 - z_2) [(x_1 y_1 - z_2)^2 + 3x_1y_1z_2]$ и число в квадратной скобке нечетное, то

$\omega(x_1^3y_1^3 - z_2^3) = \omega (x_1y_1 - z_2).$ (26)

Далее используя систему (25), имеем

$x_1^3y_1^3 - z_2^3 = (y + z)(x + z) - xy + (x + y)^2/3 = xy +$

$+yz^2 + xz + z^2 - xy + (x + y)^2/3 = zu + (x + y^2/3,$ т.е.

$x_1^3y_1^3 - z_2^3 = zu + (x + y)^2/3$ (27)

Так как $\omega(u) = \omega (x + y + z) = \omega (z) = p$, т.е. $\omega (u) = p$, и $\omega(zu) = \omega(z) + \omega (u) = 2p,$

$\omega((x + y)^2/3) = 6р$, то из (27) заключаем, что $\omega(x_1^3y_1^3 - z_2^3) = 2р$, или с учетом (27)

$\omega(x_1y_1 - z_2) = 2р.$ (28)

Итак, с одной стороны имеет место (24), а с другой - равенство (28). Так как $р\geq1$, то равенство $4р = 2р$ невозможно. Значит, в случае I получаем противоречие.

Теперь рассмотрим случай II.

Тогда $x^+ + x_1^3 = u, y^+ + y_1^3/3 = u, z^+ + z_1^3 = u,$ или одно и то же

$x_1^3 = y + z, y_1^3 = 3(x + z), z_1^3 = x + y.$ (29)

Далее, используя систему (29), получаем

$x_1^3y_1^3 - z_2^3 = 3(y + z)(x + z) - (yx - y^2 - x^2) = 3xy + 3yx + 3xz + 3z^2 - xy + y^2 + x^2 = (x + y)^2 + 3zu,$ т.е.

$x_1^3y_1^3 - z_2^3 = (x + y)^2 + 3zu.$

Дальше, поступая так же, как и в случае I, завершим доказательство и в случае II.

Итак, теорема доказана.

Литература:

1. Саймон Синг. Великая теорема Ферма. - М.: МЦНМО, 2000. - 288 с.
2. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat`s Last Theorem// Ann. of Math., 1995.Vol.142, - P. 443-551.
3. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. - М.: Педагогика, 1985. - 352 с.
4. Сражидинов А. Об одном подходе к доказательству Великой теоремы Ферма для показателя 4. // Известия вузов Кыргызстана. - 2018. - №5. - С.10-12.