Сражидинов А.

ФЕРМАНЫН УЛУУ ТЕОРЕМАСЫНЫН 4 КӨРСӨТКҮЧҮ ҮЧҮН БОЛГОН ДАЛИЛДӨӨНҮН БИР ЫКМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Сражидинов А.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ 4

A. Srazhidinov

ONE APPROACH TO THE PROOF OF THE GRAND THEOREM OF THE FERMAT’S FOR THE EXPONENT 4

УДК: 511.521

Перье де Ферма (1601-1665-жж.) 1637-жылы Диофанттын «Арифметикасын» окуп жатып, Байыркы Грециядан бери белгилүү болгон Пифагордун (б.э.ч. 500-жылдары) теоремасынын тушуна бүтүндөй математика дүйнөсүнө «Ферманын улуу теоремасы» деген аталыш менен белгилүү болгон Пифагордун теоремасынын түздөн-түз жалпыланышы болгон бүтүмдүн туура эместиги жөнүндө проблеманы койгон жана аны чечкендигин далилсиз айткандан тартып белгилүү. Аталган теореманын маңызы өтө жөнөкөй, кала берсе мектеп окуучусуна да түшүнүктүү, бирок аны далилдөө оңой эмес. Ферманын улуу теоремасы чечкиндүүлүктүн, алдамчылыктын, тапкычтыктын жана трагедиянын тарыхы катарында математикада белгилүү мисал болуп саналат. Бул проблемага өз учурунда белгилүү болгон математиктер кызыгып келишкен. Сунушталган ыкма жаңыдан тандалган өзгөрмөлөр u жана v нын квадраттары баштапкы өзгөрмөлөрдүн тиешелүү түрдө квадраттарынын суммаларынын жана айырмаларынын көбөйтүндүсү түрүндө көргөзүлгөн. Аталган ыкманын артыкчылыгы - анын жөнөкөйлүгүндө. Бул жогорку класстардын окуучулары үчүн теореманын маңызын тереңирээк түшүнүүгө, ал эми математиктердин кеңири катмарына эски проблемага жаңыча кароого түрткү берет го деп ойлойбуз.

Негизги сөздөр: *сандар теориясы, Ферманын улуу теоремасы, жаңы ыкма, 4 көрсөткүчү.*

Большой популярностью во всем мире пользуется «Великая теорема Ферма», которая зарождалась Перье де Ферма (1601-1665 гг.) при чтении в 1637 году книги «Арифметики» Диофанта. Вообще, нет надобности представлять столь известную теорему, суть которой довольно проста, даже школьнику, но доказательство оказалось необычайно трудным. Великая теорема Ферма поистине является примером захватывающей истории о смелости, мошенничестве, догадке и трагедии - история, которая так или иначе привлекла внимание известных в свое время математиков. Суть предложенного нами способа доказательства для частного случая n=4 состоит в выборе новых переменных u и v, квадраты которых равны удвоенному произведению разности или сумме квадратов, не имеющих общих делителей, исходных переменных соответственно. Преимущество предлагаемого метода для n=4 состоит в его простоте. Мы надеемся, что новый подход к доказательству дает возможность старшеклассникам легче понимать суть теоремы, а широкой публике математиков взглянуть по новому на старую проблему.

Ключевые слова: *теория чисел, Великая теорема Ферма, новый подход, показатель 4.*

The «Great theorem of Fermat», which was born by Perrier de Fermat (1601-1665) when reading In 1637 the book Diophantus «Arithmetic». In general, there is no need to present such a well-known theorem, its idea is quite simple, even to the student, but the proof was extremely difficult. Fermat’s grand theorem is by no means an example of exciting story about courage, fraud, conjecture, and tragedie - a story that dulls some mathematician of some time. The essence of our proposed method of proof for the particular case n=4 consists in choosing new variables u and v, whose squares are equal to twice the product of the difference or the sum of squares that do not have common divisors, the original variables, respectively. The advantage of the proposed method for n=4 is its simplicity. We hope that a new approach to the proof makes it possible for senior schoolchildren to understand the fate of the theorem more easily, and for the general public of mathematicians to look at the old problem in a new way.

Key words: *number theory, Fermat’s grand theorem, a new approach, exponent 4.*

У упомянутой теоремы имеется богатая история. Ее истоки уходят в далекую древность. Ее частный случай:

$$a^2 + b^2 = c^2 , \qquad (1)$$

так называемой теоремой Пифагора, впервые в натуральных числах доказан древнегреческим математиком Пифагором (около 500 лет д.н.э.). Хотя эту теорему знали еще в древности индийские, арабские и китайские ученые, но не имели доказательства.

История Великой теоремы Ферма начинается с того момента, когда известный ученый Пьер Ферма (1601-1665 гг.) высказал мысль об обобщении при чтении изданной Мезириаком "Арифметики" Диофанта. На полях этой книги, против того места, где идет речь о решении уравнения вида (1), Ферма написал: "Между тем, совершенно невозможно разложить полный куб на сумму кубов, четвертую степень - на сумму четвертых степеней, вообще какую ни будь степень - на сумму степеней с тем же показателем. Я нашел поистине удивительное доказательство этого предположения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить".

Справедливость этой теоремы подтверждается для многих частных случаев. Например, на ЭВМ, пользуясь идеями Куммера и Вандивера доказали справедливость теоремы Ферма для показателей $n \leq 100000$.

В 1847 году Ламе объявил, что ему удалось найти доказательство теоремы Ферма для всех простых показателей $n \geq 3$. Однако сразу же Лиувилль обнаружил пробел в рассуждениях Ламе, с чем Ламе был вынужден согласиться.

В 1907 году умер в Германии математик Вольфскель, который завешал 100000 марок тому, кто даст полное доказательство Великой теоремы Ферма. Но премия до сих пор никому не выдана за отсутствием настоящего доказательства Большой теоремы Ферма. Элементарного доказательства данной теоремы нет ни для одного показателя $n \neq 4$.

По истории Великой теоремы Ферма имеется много библиографий, смотрите , например, [1]-[4] и в сети Internet.

Данная работа посвящена элементарному доказательству для показателя n=4. Рассмотрим в натуральных числах уравнение

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (2)$$

Предположим, что равенство (2) имеет решение. Неограничевая общности, будем считать, что x, y, z попарно взаимно простые, т.е. наибольший общий делитель любой пары этих чисел равен 1:

$$D(x,y)=D(x,z) = D(y,z) = 1 \qquad (3)$$

А также будем пользоваться следующими простыми обозначениями Теории чисел. Будем писать $a \equiv b$, если a делится на число b, и $a \not\equiv c$, если a не делится на число c.

В (2) замечаем, что x и y одновременно не могут быть нечетными. В самом деле, если считать $x = 2x_1+1$, $y = 2y_1+1$, $z = 2z_1$, то левая часть (2) не делится на 16, а правая - делится, так как левая и правая части соответственно имеют вид 16m +2 и 16n, где m и n – некоторые натуральные числа

Итак, если (2) имеет место при натуральных x, y, z, то либо x, либо y четное, а z нечетное. Для определенности будем считать, что x - нечетное, y - четное, z- нечетное натуральные числа. Обозначим

$$u=x^2+y^2-z^2, \qquad (4)$$

$$v=x^2+y^2+z^2. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) соответственно получаем:

$$u^2=2(z^2-x^2)(z^2-y^2), \qquad (6)$$

$$v^2=2(z^2+x^2)(z^2+y^2) \qquad (7)$$

Действительно, равенство (4) , переписав в виде $u + z^2= x^2+y^2$, последовательно имеем:

$$(u+z^2)^2=(x^2+y^2)^2,\ u^2+z^4+2uz^2=x^4+y^4+2x^2y^2,\ u^2=2(x^2y^2-uz^2). \qquad (8)$$

Далее, выражение в скобках (8) преобразуем с учетом (2):

$$x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)z^2= x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4,$$
$$x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)z^2=x^2(y^2-z^2)-z^2(y^2-z^2),$$
$$x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)z^2=(z^2-y^2)(z^2-x^2).$$

Поэтому имеет (6). Аналогично получится равенство (7). Действительно , как и выше, получаем

$$v-z^2=2x^2y^2,\ v^2-2z^2v+z^4=x^4+y^4+2x^2y^2,\ \text{т.е. } v^2-2z^2v-2x^2y^2=0, \qquad (9)$$

или с учетом (5).

$$v^2=2(z^2+x^2y^2),\ v^2=2[z^2(2x^2+y^2+z^2)+x^2y^2],\quad v^2=2[x^2(y^2+z^2)+z^2(y^2+z^2)].$$

Отсюда непосредственно следует (7). Теперь рассмотрим равенство (7). Так как x и z оба нечетные, то $(x^2+z^2)/2$ не делится на 2. В самом деле, имеем $z = 2z_1+1$, $x=2x_1+1$, отсюда получаем

$$z^2+x^2=4(z_1^2+z_1+x_1^2+x_1)+2.$$

Разделив обе части последнего равенства на 2 , имеем $(x^2+z^2)/2= 2(z_1^2+z_1+x_1^2+x_1)+1$, что не делится на 2.

Переписав (7) в виде $v^2=4((x^2+z^2)/2)z^2+y^2))$, заключаем, что $v \equiv 4$, $v \not\equiv 8$. (10)

Теперь установим, что $y \equiv 2$, $y \equiv 4$. (11)

С этой целью рассмотрим уравнение (9). В этом уравнении, если предположить, что $y \equiv 4$, то в силу (10) имели бы $v^2 \equiv 16$, $2x^2y^2 \equiv 32$. Тогда должно быть $2z^2v \equiv 16$, т.е. $v \equiv 8$. Это противоречит соотношению (10).

Итак, имеет место (11).

Теперь возвращаемся к уравнению (6). Так как x - нечетное, y - четное, z - нечетное натуральные числа, то $z^2 - y^2$ нечетное, $z^2 - x^2$ – четное числа. Поскольку x, y и z попарно взаимно простые числа, то $z^2 - y^2$ и $z^2 - x^2$ так же взаимно простые числа. В самом деле, из (2) имеем

$$x^4 = z^4 - y^4,\ x^4 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2)\ , \tag{12}$$

$$y^4 = z^4 - x^4,\ y^4 = (z^2 - x^2)(z^2 + x^2). \tag{13}$$

Если l является общим простым делителем чисел $z^2 - y^2$, $z^2 - x^2$, тогда из (12), (13) соответственно получаем $y \equiv l$ и $x \equiv l$. Так как x, y, z взаимно простые, то $l = 1$. Значит имеет место

$D\,(z^2 - x^2, z^2 - y^2) = 1$.

Так как y – четное, z - нечетное, то $z^2 – y^2$ – нечетное, следовательно, с учетом (6) заключаем, что

$$z^2 - y^2 = c^2, \tag{14}$$

где c – некоторое нечетное натуральное число. Равенство (14) имеет место лишь тогда, когда

$$y = (p^2 - q^2)/2 \quad z = (p^2 + q^2)/2,\ c = pq, \tag{15}$$

где p и q – взаимно простые нечетные числа. Рассмотрим первое равенство (15).

Так как $p = 2p_1+1$, $q = 2q_1 + 1$, то $p^2 - q^2 = 4(p_1^2 + p_1 - q_1^2 - q_1)$, т.е. $(p^2 - q^2)/2 = 2[(p_1(p_1 + 1) - q_1(q_1 + 1)]$. (16)

В квадратных скобках (16) стоит четное число, которое делится на 4, ибо либо p_1, либо p_1+1 четное, то есть $p_1(p_1+1)$ четное, аналогично четно и число $q_1(q_1+1)$. Следовательно , $(p^2 - q^2)/2$ четное число делится на 4.

Мы получили противоречие соотношению (11), что доказывает теорему.

Литература:

1. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. - М.: Наука, 1992.
2. Постников М.М. Теорема Ферма. - М., 1978.
3. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики. - Минск, 1979.
4. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - М., 1974.

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Кошуев А.