

Бакирова Э.М., Бакирова Н.М., Фоломеев В.Н.

**R^2 ГРАВИТАЦИЯ ИЧИНДЕ АНИЗОТРОПТУК НЕЙТРОНДУК ЖЫЛДЫЗДАР
 УЧҮН МАССА-РАДИУС КАТЫШЫ ЖӨНҮНДӨ**

Бакирова Э.М., Бакирова Н.М., Фоломеев В.Н.

**О СООТНОШЕНИИ МАССА-РАДИУС ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ НЕЙТРОННЫХ
 ЗВЁЗД В РАМКАХ R^2 ГРАВИТАЦИИ**

E.M. Bakirova, N.M. Bakirova, V.N. Folomeev

**ABOUT THE MASS-RADIUS RELATION FOR ANISOTROPIC
 NEUTRON STARS WITHIN R^2 GRAVITY**

УДК: 524.834

Макалада скалярдык ийрилик боюнча квадраттык кошумча менен сүрөттөлгөн, модифицирленген гравитациянын теориясынын чегинде нейтрондук жылдыздын статикалык модели каралган. Аналитикалык аппроксимациондук формула менен берилген нейтрондук затты моделдештирүү үчүн абалдын реалисттик теңдемеси колдонулат. Ушундай конфигурациялар үчүн эркин параметрдин ар түрдүү маанилери толук массасы жана өлчөмдөрү эсептелген жалпы салыштырмалуулук теориядан системанын канчалыкка четтөө даражасын аныктайт. Байкоо маалыматтарына ылайыкташ үчүн нейтрондук заттын эки түрдөгү анизотропиясы колдонулат. Алар заттын локалдык касиеттерин дагы (басым аркылуу) жана конфигурациялардын квазилокалдык касиеттерин дагы (компакттуулук аркылуу) эске алышат. Нейтрондук жылдыз үчүн “масса-радиус” катышы боюнча байкалган астрономиялык берилгендерди колдонуп, абалдын “катуу” абалдын теңдемесин колдонууда, суюктуктун анизотропиясын кошкондо гана модель байкоолорго туура келе тургандыгы көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: анизотропдук зат, компакттык астрофизикалык конфигурация, модифицирленген гравитация.

В статье рассматривается модель статической нейтронной звезды в рамках модифицированной теории гравитации, описываемой квадратичной добавкой по скалярной кривизне. Для моделирования нейтронного вещества используется реалистичное уравнение состояния, задаваемое аналитической аппроксимационной формулой. Для такой конфигурации рассчитываются полная масса и размеры при различных значениях свободного параметра, определяющего степень отклонения системы от общей теории относительности. Для удовлетворения наблюдательным данным используются два типа анизотропии нейтронного вещества, которые учитывают, как локальные свойства вещества (через давление), так и квазилокальные свойства конфигураций (через компактность). Используя наблюдательные астрономические данные по соотношению «масса-радиус» для нейтронных звезд, показывается, что при использовании «жесткого» уравнения состояния модель удовлетворяет наблюдениям только при включении анизотропии жидкости.

Ключевые слова: анизотропное нейтронное вещество, компактные астрофизические конфигурации, модифицированная гравитация.

The paper studies the model of a static neutron star within modified gravity described by a quadratic additional scalar curvature term. To model neutron matter, a realistic equation of state given in the form of an analytic approximate expression is employed. For such a configuration, the total mass and sizes for different values of the free parameter determining the deviation of the system from general relativity are calculated. To satisfy observational constraints, two forms of the neutron fluid anisotropy are used; they take into account both the local properties of the matter (through pressure) and the quasilocal properties of the configuration (through compactness). Using the observational data on the mass-radius relation for neutron stars, it is shown that when one employs a stiff equation of state the model satisfies to the observations only when the fluid anisotropy is taken into account.

Key words: anisotropic neutron matter; compact astrophysical configurations; modified gravity.

1. Введение. Нейтронные звёзды (НЗ) являются хорошим полигоном для тестирования различных теоретических моделей вещества, находящегося при экстремальных физических условиях. Действительно, для внутренних областей НЗ характерны сверхвысокие плотности (порядка ядерной) и давления. Такое вещество не может быть получено в земных лабораториях; в настоящее время его свойства и детальный состав полностью неизвестны. Для описания такого вещества могут использо-

ваться только теоретические модели. Их проверка выполняется путём анализа и интерпретации результатов астрономических наблюдений с последующим уточнением исходных теоретических моделей [1].

С другой стороны, физические характеристики НЗ также в значительной степени определяются их собственным сильным гравитационным полем. Описание последнего может выполняться в рамках различных теорий гравитации. Обычно рассмотрение НЗ проводится в общей теории относительности (ОТО) А.Эйнштейна, в рамках которой достигнут значительный прогресс при построении теоретических моделей, адекватно описывающих наблюдательные свойства НЗ (см. например, в [2]).

Однако вместо ОТО можно работать и в рамках других теорий гравитации. В частности, это может быть так называемая $f(R)$ гравитация, в которой эйнштейновский гравитационный лагранжиан $\sim R$ заменяется на модифицированный лагранжиан $\sim f(R)$, где $f(R)$ есть некоторая функция от скалярной кривизны R . В настоящее время такие теории гравитации с успехом применяются для моделирования различных космологических аспектов современной и ранней Вселенной (обзор по данной тематике см. в работах [3-5]). Кроме того, в $f(R)$ гравитации исследуются модели релятивистских звёзд [6, 7], а также модели НЗ [8-13]. В этих исследованиях показывается, что модификация гравитации может существенно влиять на ряд важных физических характеристик НЗ, что, в принципе, может быть непосредственно проверено через наблюдения.

В указанных выше работах вещество НЗ полагается изотропным, т.е. давление по всем направлениям считается одинаковым. В рамках модифицированных теорий гравитаций (МТГ) анизотропные звёзды были рассмотрены в работе [14], где исследованы статические и медленно вращающиеся объекты в скалярно-тензорной теории гравитации. Целью данной статьи является исследование анизотропных НЗ в рамках $f(R)$ гравитации.

2. Постановка задачи и уравнения.

Мы рассматриваем модифицированную гравитацию с действием [сигнатура метрики $(+, -, -, -)$]

$$S = -\frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m, \quad (1)$$

где G есть ньютоновская гравитационная постоянная, $f(R)$ – произвольная нелинейная функция от R , а S_m обозначает действие для материи.

Для наших целей представим функцию $f(R)$ в виде $f(R) = R + \alpha h(R)$, где $h(R)$ есть новая произвольная функция от R , а α – произвольная константа. При $\alpha = 0$ мы возвращаемся к ОТО. Соответствующие полевые уравнения могут быть получены путём варьирования действия (1) по метрике:

$$(1 + \alpha h_R) G_i^k - \frac{1}{2} \alpha (h - R h_R) \delta_i^k + \alpha (\delta_i^k g^{mn} - \delta_i^m g^{kn}) (h_R)_{;m;n} = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k. \quad (2)$$

Здесь $G_i^k \equiv R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R$ есть тензор Эйнштейна, $h_R \equiv dh/dR$, а точка с запятой обозначает ковариантную производную.

Для получения уравнений МТГ и уравнения для жидкости выберем сферически-симметричную метрику в виде

$$ds^2 = e^\nu (dx^0)^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3)$$

где ν и λ есть функции только от радиальной координаты r , а $x^0 = ct$ есть временная координата.

В качестве источника вещества воспользуемся анизотропной жидкостью, для которой радиальная, p_r , и тангенциальная, p_t , компоненты давления не равны друг другу. Для такой жидкости тензор энергии-импульса может быть записан в виде (см. работу [15]):

$$T_i^k = (\varepsilon + p_t) u^k u_i - \delta_i^k p_t + (p_r - p_t) s^k s_i, \quad (4)$$

где ε есть плотность энергии жидкости. Радиальный единичный вектор s^k определяется как $s^k = (0, e^{-\lambda/2}, 0, 0)$, с $s^k s_k = -1$ и $s^k u_k = 0$. Тогда тензор энергии-импульса содержит только следующие ненулевые диагональные компоненты: $T_i^k = (\varepsilon, -p_r, -p_t, -p_t)$.

Свёртка уравнения (2) даёт уравнение для скалярной кривизны

$$R'' = -\left[\frac{2}{r} + \frac{1}{2}(v' - \lambda')\right]R' - \frac{h_{3R}}{h_{2R}}R'^2 + \frac{e^\lambda}{3h_{2R}}\left[R h_R - 2h - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{8\pi G}{c^4}T + R\right)\right], \quad (5)$$

где T есть свёртка тензора энергии-импульса (4) и штрих обозначает дифференцирование по r .

В свою очередь, $(\overset{t}{t})$ и $(\overset{r}{r})$ компоненты ур. (2) есть

$$(1 + \alpha h_R) \left[-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\right] - \alpha \left\{\frac{1}{2}(h - h_R R) + e^{-\lambda} \left[h_R'' - \left(\frac{1}{2}\lambda' - \frac{2}{r}\right)h_R'\right]\right\} = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon, \quad (6)$$

$$(1 + \alpha h_R) \left[-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\right] - \alpha \left[\frac{1}{2}(h - h_R R) + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2}v' + \frac{2}{r}\right)h_R'\right] = -\frac{8\pi G}{c^4} p_r, \quad (7)$$

где правые части берутся из (4).

Вводя новую функцию $M(r)$, определяемую как

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}, \quad (8)$$

ур. (6) может быть переписано в форме

$$\frac{dM}{dr} = \frac{4\pi}{c^2} r^2 \varepsilon - \alpha \frac{c^2}{2G} r^2 \left\{\frac{8\pi G}{c^4} h_R \varepsilon - \frac{1}{2}(h - h_R R) - e^{-\lambda} \left[h_R'' - \left(\frac{1}{2}\lambda' - \frac{2}{r}\right)h_R'\right]\right\}. \quad (9)$$

Наконец, $i = r$ компонента закона сохранения $T_{i;k}^k = 0$ даёт уравнение

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{1}{2}(\varepsilon + p_r) \frac{dv}{dr} + \frac{2}{r}(p_t - p_r). \quad (10)$$

Для полного описания рассматриваемой конфигурации необходимо ввести уравнение состояния (УС) жидкости. Для этого мы выберем простейшую зависимость $p_r = p_r(\rho)$ и зададим вид функции $\Delta \equiv p_t - p_r$, которая присутствует в ур. (10). Эта функция называется фактором анизотропии [16]. В рамках статьи мы выберем две различные функции Δ , используемые в литературе при моделировании анизотропного вещества, находящегося при высоких плотностях в сильных гравитационных полях:

1. Квазилокальное УС, предложенное Horvat *et al.* в работе [17]:

$$\Delta \equiv p_t - p_r = \lambda_H p_r \mu, \quad (11)$$

где λ_H есть свободный параметр, контролирующий степень анизотропии и функция $\mu = 2GM(r)/c^2 r$ называется компактностью. Величина параметра анизотропии λ_H может быть порядка единицы [18, 19], и в литературе рассматривается диапазон $-2 \leq \lambda_H \leq 2$ [14, 20, 21].

2. Другая форма фактора анизотропии

$$\Delta = \lambda_{BL} \frac{G}{c^4} (\varepsilon + p_r)(\varepsilon + 3p_r) e^{\lambda r^2}, \quad (12)$$

использовалась Bowers и Liang [22] для описания несжимаемых звёзд с постоянной плотностью. Как и в случае с анизотропией из (11) эта Δ (частично) гравитационно индуцирована (посредством

множителя e^λ), но зависит нелинейно от p_r и ε . Присутствующий здесь параметр анизотропии λ_{BL} также порядка единицы (см., например, работу [14], где $-2/3 \leq \lambda_{BL} \leq 2/3$).

3. Численные результаты.

Проинтегрируем численно уравнения из предыдущего раздела. Для этого необходимо задать УС для нейтронного вещества. Здесь мы воспользуемся хорошо известным из литературы «жестким» УС BSk21. Для удобства выполнения расчётов оно может быть представлено в виде следующей аналитической аппроксимации

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^3}{1 + a_4 \xi} \{ \exp[a_5(\xi - a_6)] + 1 \}^{-1} \\ & + (a_7 + a_8 \xi) \{ \exp[a_9(a_6 - \xi)] + 1 \}^{-1} \\ & + (a_{10} + a_{11} \xi) \{ \exp[a_{12}(a_{13} - \xi)] + 1 \}^{-1} \\ & + (a_{14} + a_{15} \xi) \{ \exp[a_{16}(a_{17} - \xi)] + 1 \}^{-1} \\ & + \frac{a_{18}}{1 + [a_{19}(\xi - a_{20})]^2} + \frac{a_{21}}{1 + [a_{22}(\xi - a_{23})]^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

с $\zeta = \log(p_r / \text{дин см}^{-2})$, $\xi = \log(\rho / \text{г см}^{-3})$, где ρ есть плотность нейтронного вещества и $f(x) = [\exp(x) + 1]^{-1}$. Значения коэффициентов a_i могут быть найдены в работе [23].

Также необходимо выбрать гравитационный лагранжиан. Здесь мы работаем в рамках R^2 гравитации, для которой

$$f = R + \alpha h(R) \equiv R + \alpha R^2. \quad (14)$$

Значение свободного параметра α должно бы ограничено наблюдениями. В случае квадратичной гравитации имеются два типа ограничений на α . Во-первых, в пределе слабого поля он ограничен данными по двойным пульсарам как $|\alpha| \leq 5 \times 10^{15} \text{ см}^2$ [24]. Во-вторых, в режиме сильной гравитации ограничение есть $|\alpha| \leq 10^{10} \text{ см}^2$ [9]. Здесь мы следуем работе [25] и используем два различных значения $\alpha = -5 \times 10^{10} \text{ см}^2$ и $\alpha = -20 \times 10^{10} \text{ см}^2$.

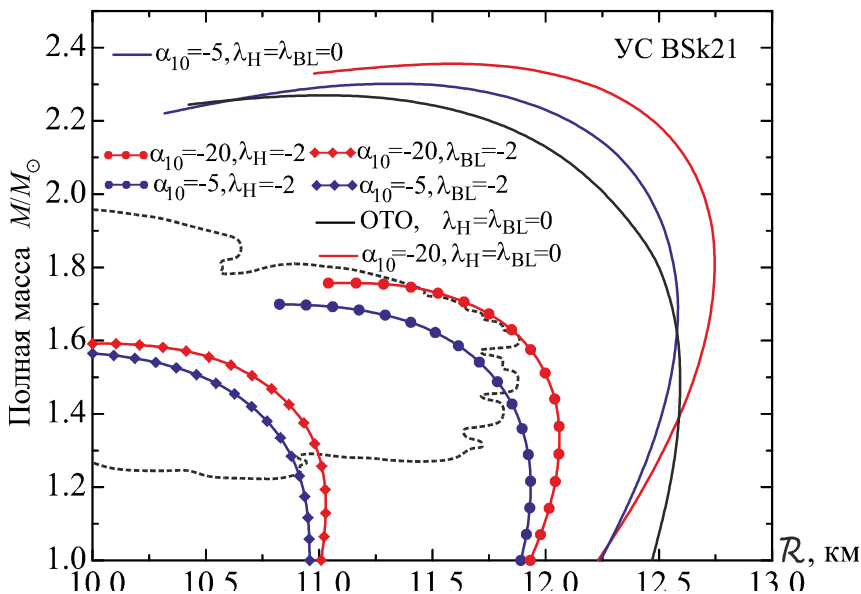


Рис. 1. Соотношения масса-радиус нейтронных звёзд в ОТО и в МГТ для различных значений α_{10} (индекс 10 у α обозначает, что этот параметр даётся в единицах 10^{10} см^2) и параметров анизотропии λ_H и λ_{BL} . Штриховой контур отмечает область наблюдательных ограничений [26].

Используя эти значения параметров, мы численно решали систему дифференциальных уравнений (5), (7), (9) и (10) с заданием соответствующих граничных условий в центре конфигурации. Интегрирование выполнялось из центра до точки, в которой плотность нейтронного вещества становилась равной $\rho_b \approx 10^6 \text{ г см}^{-3}$. Эту точку мы считали границей звезды, вплоть до которой остаётся справедливым используемое здесь УС [23]. Результаты численных расчётов показаны на рисунке 1, где представлены зависимости масса-радиус ($M - R$) для типичных значений массы звезды $M \sim (1 - 2)M_\odot$. Из рисунка видно, что в изотропном случае (т.е. когда $\lambda_H = \lambda_{BL} = 0$) соответствующие кривые совсем не попадают в область наблюдательных ограничений (показана штриховой линией). Таким образом в предположении изотропии нейтронной жидкости рассматриваемое «жесткое» УС не может быть использовано для моделирования объектов, удовлетворяющих современным наблюдательным данным по соотношениям $M - R$. В свою очередь, учитывая возможность наличия в сверхплотном веществе анизотропии давления, кривые $M - R$ могут быть сдвинуты в область наблюдательных ограничений. Как показывают расчёты, этого можно добиться только для отрицательных значений λ_H, λ_{BL} , что означает, что тангенциальное давление p_t меньше радиального p_r [см. выражения (11) и (12)]. На рисунке 1 показаны соответствующие соотношения $M - R$ для $\lambda_H, \lambda_{BL} = -2$, которые позволяют получить конфигурации с характеристиками, более или менее приемлемыми с точки зрения наблюдений.

Суммируя полученные результаты, в статье исследованы статические НЗ в рамках R^2 гравитации. Целью было построение объектов с характеристиками, согласующимися с современными наблюдательными данными по соотношению масса-радиус нейтронных звёзд. Моделирование выполнялось с использованием хорошо известного из литературы УС BSk21, описывающего вещество при высоких плотностях. Для удовлетворения наблюдательным данным нами были использованы два типа анизотропии в виде (11) и (12), которые учитывают, как локальные свойства вещества (через давление), так и квазилокальные свойства конфигураций (через компактность). Выбирая определённые значения параметров анизотропии, мы показали, что возможно сместить кривые $M - R$ в область наблюдательных ограничений (см. рис. 1) даже в случае использования «жесткого» УС.

Литература:

1. Potekhin A.Y. The physics of neutron stars. // Phys. Usp. -2010. - V.53. P.1235-1256.
2. Haensel P., Potekhin A.Y., and Yakovlev D. G. Neutron Stars 1: Equation of State and Structure (Springer, New York, 2007).
3. De Felice A. and Tsujikawa S. $f(R)$ theories. // Living Rev. Relativity - 2010. - V.13 P.3.
4. Nojiri S. and Odintsov S.D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. // Phys. Rep. - 2011. - V.505. P.59.
5. Nojiri S., Odintsov S.D., and Oikonomou V.K. Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution. // Phys. Rep. - 2017. - V.692. P.1.
6. Upadhye A. and Hu W. The existence of relativistic stars in $f(R)$ gravity. // Phys. Rev. -2009. - V.D80:064002.
7. Babichev E. and Langlois D. Relativistic stars in $f(R)$ and scalar-tensor theories. // Phys. Rev. -2010. -V.D81:124051.
8. Cooney A., DeDeo S., and Psaltis D. Neutron Stars in $f(R)$ Gravity with Perturbative Constraints. // Phys. Rev. - 2010. - V.D82:064033.
9. Arapoglu A. S., Deliduman C., and Eksi K. Y. Constraints on Perturbative $f(R)$ Gravity via Neutron Stars. // J. Cosmol. Astropart. Phys. -2011. - V.07:020.
10. Orellana M., Garcia F., Teppa Pannia F. A., and Romero G. E. Structure of neutron stars in $f(R)$ -gravity. // Gen. Relativ. Gravit. - 2013. - V.45. P.771.
11. Alavirad H. and Weller J. M. Modified gravity with logarithmic curvature corrections and the structure of relativistic stars. // Phys. Rev. - 2013. - V.D88:124034.
12. Astashenok A.V., Capozziello S., and Odintsov S.D. Further stable neutron star models from $f(R)$ gravity. // J. Cosmol. Astropart. Phys. - 2013. - V.12:040.
13. Ganguly A., Gannouji R., Goswami R., and Ray S. Neutron stars in the Starobinsky model.// Phys. Rev. - 2014. - V.D89:064019.
14. Silva H.O., Macedo C.F. B., Berti E., and Crispino L.C. B. Slowly rotating anisotropic neutron stars in general relativity and scalar-tensor theory. // Classical Quantum Gravity - 2015. -V.32:145008.
15. Herrera L. and Barreto W. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. // Phys. Rev. - 2013. - V.D88:084022.
16. Herrera L. and Ponce de Leon J. Isotropic and anisotropic charged spheres admitting a one-parameter group of conformal motions. // J. Math. Phys. - 1985. - V.26. P.2302.
17. Horvat D., Ilijic S., and Marunovic A. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with quasi-local equation of state. // Classical Quantum Gravity - 2011. - V.28:025009.
18. Sawyer R.F. and Scalapino D.J. Pion condensation in superdense nuclear matter. // Phys. Rev. - 1973. - V.D7. P. 953.
19. Nelmes S.G. and Piette B. M.A.G. Phase Transition and Anisotropic Deformations of Neutron Star Matter. // Phys. Rev. - 2012. - V.D85:123004.

20. Doneva D.D. and Yazadjiev S.S. Gravitational wave spectrum of anisotropic neutron stars in Cowling approximation. // Phys. Rev. - 2012. - V.D85:124023.
21. Folomeev V. and Dzhunushaliev V. Magnetic fields in anisotropic relativistic stars. // Phys. Rev. - 2015. - V.D91:044040.
22. Bowers R. L. and Liang E. P. T. // Astrophys. J. -1974. –V.188. P. 657.
23. Potekhin A.Y., Fantina A.F., Chamel N., Pearson J.M., and Goriely S. Analytical representations of unified equations of state for neutron-star matter. // Astron. Astrophys. -2013. - V.560:A48.
24. Naf J. and Jetzer P. On the $1/c$ Expansion of $f(R)$ Gravity. // Phys. Rev. - 2010. - V.D81:104003.
25. Astashenok A.V., Odintsov S.D., and de la Cruz-Dombriz A. The realistic models of relativistic stars in $f(R) = R + \alpha R^2$ gravity. // Classical Quantum Gravity -2017. - V.34:205008.
26. Ozel F., Baym G., and Guver T. Astrophysical Measurement of the Equation of State of Neutron Star Matter. // Phys. Rev. - 2010. - V.D82:10130.

Рецензент: д.ф.-м.н. Джаманкызов Н.К.
