МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Одинаев Р.Н.

КУРТ-КУМУРСКАЛАРДЫН ЖАШ КУРАКТЫК ТҮЗҮМҮН КӨҢҮЛГӨ АЛУУ МЕНЕН ӨСҮМДҮКТӨРДҮ КОРГОО ПРОЦЕССИНИН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИ

Одинаев Р.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ С УЧЕТОМ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕКОМЫХ

R.N. Odinaev

MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS OF PLANT PROTECTION TAKING INTO ACCOUNT THE AGE STRUCTURE

УДК: 519.85-519-7

Бул иште “өсүмдүк – зыяндуу курт-кумурскалар – пайдалуу курт-кумурскалар” үч трофикалык деңгээлдердин агроценозундагы курт-кумурскалардын жаш курактык түзүмүн көңүлгө алуу менен өсүмдүктөрдү коргоонун линиялуу эмес милдеттери изилденди. Моделдүү агроценоз үчүн өсүмдүктөрдү коргоо милдетинин чечимдеринин бар болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары калыптандырылды жана негизделди.

Негизги сөздөр: *математикалык модель, агроценоз, коргоо милдети, курт-кумурскалардын саны, трофикалык функция, биосистема, жаш курак түзүмү, зыяндуу курт-кумурскалар, пайдалуу курт-кумурскалар, айыл чарба өсүмдүгү, курт-кумурскалардын саны, өсүмдүктөрдүн биомассасы, тышкы ресурс, даярдоо милдети.*

В настоящей работе исследуется нелинейная задача защиты растений с учётом возрастной структуры насекомых в агроценозе трех трофических уровней “растение – вредные насекомые – полезные насекомые”. Для модельного агроценоза сформулированы и обоснованны необходимые и достаточные условия существования решений задачи защиты растений.

Ключевые слова: *математическая модель, агроценоз, задача защиты, численность насекомых, трофическая функция, биосистема, возрастная структура, вредные насекомые, полезные насекомые, сельхозкультура, численность насекомых, биомасса растений, внешний ресурс, подготовительная задача.*

In this article we study the nonlinear problem of plant protection, taking into account the age structure and spatial distributions in the agrocenosis of the three trophic levels "plant - harmful insects - useful insects". For model agrocenosis, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to the problem of plant protection are formulated and justified.

Key words: *mathematical model, agrocoenose, protection problem, number of population, trophic functions, spatial distribution, biosystem, age structure, harmful insects, useful insects, agricultural culture, number of insects, plant biomass, external resource, preparatory task.*

Рассмотрим модельную биосистему с учетом возрастной структуры насекомых, имеющие три трофических уровня растениий, вредные насекомые, полезные насекомые, в которые поступает внешний ресурс N_0 со скоростью Q. Биомассу (или численности) соответствующих уровней обозначим через $N_i,\ N_i = N_i(t),\ i=\overline{0,3},$ где $N_0 = N_0(t)-$ масса внешнего ресурса в момент времени $t, N_1 = N_1(t)-$ биомасса растений сельхозкультуры в момент времени t, $N_i = N_i(a,t)-$ численность вредных $(i=2)$ и полезных $(i=3)$ насекомых возраста a, в момент времени t.

Пусть состояние агроценоза описывается при помощи следующих дифференциальных уравнений [1-11]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1), \\
\dfrac{dN_1}{dt} = N_1 F_1\left(N_0, N_1, \widetilde{N}_2\right), \\
\dfrac{\partial N_2}{\partial t} + \dfrac{\partial N_2}{\partial a} = N_2 F_2\left(N_1, N_2, \widetilde{N}_3\right), \quad N_2\big|_{t=0} = N_2^0(a), \\
\dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \dfrac{\partial N_3}{\partial a} = N_3 F_3(N_2, N_3), \qquad N_3\big|_{t=0} = N_3^0(a), \\
N_2(0,t) = \int\limits_0^\infty B_2(\xi, t, N_1) N_2(\xi, t) d\xi, \; 0 < t < t_k, \, 0 < a < \infty, \\
N_3(0,t) = \int\limits_0^\infty B_3\left(\xi, t, \widetilde{N}_2\right) N_3(\xi, t) d\xi,
\end{cases} \tag{1}
$$

здесь $F_i = F_i(\cdot)$ – удельные скорости роста биологических видов

$$
\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \le 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} = \begin{cases} \le 0, \, i < j, \, i = \overline{0,3} \\ \ge 0, \, i > j, \, j = \overline{0,3} \end{cases} \tag{2}
$$

$B_2(\cdot)$, $B_3(\cdot)$ – коэффициенты рождаемости.

$\widetilde{N}_i = \widetilde{N}_i(t)$, $i = 2,3$ – суммарные численности насекомых, t – время, $t \in [0, t_k]$, $t_k - const < \infty$, $t \in [0, t_k]$, a – возраст, $a \in [0, \infty)$.

Предположим, что $F_i(.)$ удовлетворять условия (2) и $B_i(.) \ge 0$, $i = 2,3$.

$$
\widetilde{N}_i = \widetilde{N}_i(t) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_i} N_i(a,t) da, \quad \alpha_i, \, \beta_i = const > 0, \; i = 2,3.
$$

Определение 1. Величину

$$
\widetilde{N}_1(t_k) = \frac{1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} N_1(t) dt \tag{3}
$$

назовем средним урожаем в момент времени t_k.

Пусть N_1^p, $N_1^p \in \left[N_1^{\min}, N_1^{\max}\right]$, плановый уровень урожая, т.е. должны выполняться следующие условия:

$$
\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_1(t_k) = \lim_{t_k \to \infty} \frac{1}{t_k} \int\limits_0^{t_k} N_1(t) dt \ge N_1^p, \quad N_1^p \in \left[N_1^{\min}, \; N_1^{\max}\right] N_1^p. \tag{4}
$$

Тогда, процесс зашиты растений состоит в определении N_2^p, N_3^p из (5).

$$
\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \le N_2^p, \quad \lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_3(t_k) \ge N_3^p, \tag{5}
$$

где $N_2^p \ge 0$, $N_3^p \ge 0$ – неизвестные параметры.

N_2^p - пороги вредоносности вредных насекомых,

N_3^p - уровень эффективности полезных насекомых.

Предположим, когда взаимодействия между видами биологических видов действуют по закону Вольтерра, т.е. функции $F_i(\cdot)$ – определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} F_0(\cdot) = -\alpha_0 N_0 N_1 \\ F_1(\cdot) = k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2 - m_1 \\ F_2(\cdot) = k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2 \\ F_3(\cdot) = k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3 \end{cases} \tag{6}$$

где m_i, $i = 1,2,3;$ k_i, $i = 0,1,2;$ α_i, $i = 0,1,2;$ ε, биологические параметры.

Теорема. *Для того, чтобы имело место соотношение*

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) = \lim_{t_k\to\infty} \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} N_1(t)dt \geq N_1^p, \quad N_1^p \in \left[N_1^{\min},\ N_1^{\max}\right]$$

необходимо и достаточно, чтобы при $t_k \to \infty$ *выполнялись неравенства*

$$\begin{cases} N_0(t) \leq \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \qquad 0 \leq t \leq t_k, \\ \lim\limits_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_2(t_k) = \lim\limits_{t_k\to\infty} \dfrac{1}{t_k}\displaystyle\int_0^{t_k} \widetilde{N}_2(t)dt \leq N_2^p, \\ \lim\limits_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_3(t_k) = \lim\limits_{t_k\to\infty} \dfrac{1}{t_k}\displaystyle\int_0^{t_k} \widetilde{N}_3(t)dt \geq N_3^p, \end{cases} \tag{7}$$

$$N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1 t_k}\ln\frac{N_1(t_k)}{N_1(0)},\ N_3^p = \frac{k_2\alpha_1}{\alpha_2}N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2 t_k}\max_a \ln\frac{N_2(a,t_k)}{N_2(a,0)}.$$

Доказательство.

Необходимость: Пусть выполняется условие $\lim\limits_{t_k\to\infty} N_1(t_k) \geq N_1^p$.

Покажем справедливость (7). Систему (1) в силу (6) можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left(-m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2\right), \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} + \dfrac{\partial N_2}{\partial a} = N_2\left(-m_2 + k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3\right), \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \dfrac{\partial N_3}{\partial a} = N_3\left(-m_3 + k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3\right). \end{cases} \tag{8}$$

Из 1-го уравнения системы (8) имеем

$$\frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1,$$

$$N_0(t) \leq N_0 \exp\left(-\alpha_0\int_0^t N_1(\tau)d\tau\right) + Q\int_0^t \exp\left(-\alpha_0\int_\tau^t N_1(\xi)d\xi\right)d\tau \leq \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right]\exp\left(-\alpha_0 N_1^p t\right) + \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left(-m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\ln N_1 = -m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2$$

$$\alpha_1 \widetilde{N}_2 = -m_1 + k_0\alpha_0 N_0 - \frac{d}{dt}\ln N_1, \quad \left(N_0(t) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$$

$$\widetilde{N}_2(t) \le \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dt}\ln N_1(t).$$

Отсюда,

$$N_0(t) \le \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \; 0 \le t \le t_k, \quad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$$

Последнее неравенство, интегрируя по t от 0 до t_k,

$$\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} \widetilde{N}_2(t_k) \le \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1 t_k}\ln\frac{N_1(t_k)}{N_1(0)}.$$

При $t_k \to \infty$, имеем

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_2(t_k) \le N_2^p.$$

Теперь воспользуемся третьим уравнением системы (8):

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} = N_2\left(-m_2 + k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3\right).$$

Введем замену переменных

$a = t + \tau, \; \varphi(t,\tau) = N_2(t+\tau, t)$

и учитывая условие $\frac{da}{dt} = 1$, заключаем

$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a}$, из последнего уравнения имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\varphi = (-m_2 + k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3).$$

Отсюда

$$\widetilde{N}_3 = \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2}N_1 - \frac{m_2}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\varphi,$$

то интегрируя последнее уравнение по t от 0 до t_k находим

$$\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} \widetilde{N}_3(t)dt = \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2}\widetilde{N}_1(t_k) - \frac{m_2}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2 t_k}\ln\frac{N_2(a - t_k, t_k)}{N_2(a - t_k)}.$$

Здесь переходя к пределу $t_k \to \infty$ получим

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_3(t_k) \ge N_3^p.$$

Достаточность:

Пусть имеет место условие (7), покажем, что

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) \ge N_1^p, \quad N_1^p \in \left[N_1^{\min}, \; N_1^{\max}\right].$$

Из 1-го уравнения системы (8) имеем

$$N_0(t) \geq N_0(0) + Qt - \alpha_0 \int_0^t N_0(t) N_1(t) dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} N_1(t_k) - N_1^p \geq \frac{\left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right] N_1^p}{Qt_k}, \quad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$$

и следовательно переходя к пределу при $t_k \to \infty$, получим

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_1(t_k) \geq N_1^p.$$

Пример. Пусть $N_1^P = 45$ условных единиц и Q=5500 условных единиц, $k_0 = 0.9, k = 0.8,$ $m_1 = m_2 = 0.02, \alpha_1 = \alpha_2 = 1,$ тогда определим величину $N_2^P, u\ N_3^P$ по следующим формулам

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \quad N_3^P = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^P - \frac{m_2}{\alpha_2}. \tag{9}$$

Из (9) имеем, что $N_2^P \approx 110,\ N_3^P \approx 36$. Видно, что для этих выходных данных, чтобы получить не менее 45 условных единиц урожая, численность вредителей должна быть не более 110 единиц, а численность полезных насекомых не менее 36 единиц. При таких соотношениях между численностями вредных и полезных насекомых в агроценозе наступает состояние при котором не возникает необходимость в применении химических средств против вредителей. Заметим, что полученные результаты качественно совпадают с эмпирическими шкалами сотрудников Института зоологии и паразитологии Академии наук Республики Таджикистан.

Литература:

1. Одинаев Р.Н., Косимов Ш.Н. Исследование точечной математической модели задачи защиты растений в нестационарном случае // Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (134). - Душанбе, 2014. - С. 6-10.
2. Одинаев Р.Н., Косимов Ш.Н. Определение критических значений задачи защиты растений // Материалы Республиканской научной-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан»). - Душанбе, 2016. - С. 47-48.
3. Одинаев Р.Н. Исследование математической модели задачи защиты растений в стационарном случае // Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (110). - Душанбе, 2013. - С. 7-11.
4. Одинаев Р.Н. Исследование математической модели задачи защиты растений (математическое моделирование, численные методы и комплексы программ): автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Душанбе, 1997. - С. 15.
5. Юнусов М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. - Душанбе: Дониш, 1991. - С. 146.
6. Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. - Доклады АН РТ, том 58, №10. - Душанбе, 2015. - С. 879-886.
7. Одинаев Р.Н. Об одной нелинейной математической модели защиты растений с учетом возрастной структуры // Вестник Таджикского национального университета №1/2 (196). - Душанбе, 2016. - С. 13-17.
8. Одинаев Р.Н. Об одном необходимом и достаточном условии существования решения задачи защиты растений // Евразийское Научное Объединение. 2017. Т.1. №12 (34). - С. 20-25.
9. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М.: Наука, 1976. - С. 286.
10. Одинаев Р.Н. Задача защити растений для точечных моделей и при произвольных трофических функциях // Вестник Таджикского национального университета.– №1/3(85). - Душанбе. - С. 25-30.
11. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. - М.: Наука, 1978. - С. 352.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Юсупов Г.А.