ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL SCIENCES

Ботолаева Г.К., Дыйканова А.Т., Урманбетов Р.Дж.

КАНЫКПАГАН ЧӨЙРӨДӨГҮ СУЮКТУКТАРДЫН КЫЙМЫЛЫНЫН БИР ӨЛЧӨМДҮҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕСИН АНАЛИТИКАЛЫК ИЗИЛДӨӨ

Ботолаева Г.К., Дыйканова А.Т., Урманбетов Р.Дж.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЛАГИ В НЕНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ

G.K. Botolaeva, A.T. Dyikanova, R.Dzh. Urmanbetov

ANALYTICAL RESEARCH OF ONE- DIMENSINAL NONLINEAR EQUATION OF MOISTURE MOVEMENT IN UNSATURATED MEDIUM

УДК: 532.546

Бир тектүү сызыктуу эмес суу өткөрүмдүү теңдеменин бир нече аналитикалык чыгарылыштары сунушталды. Ошондой эле, каныкпаган чөйрөдөгү суюктуктардын кыймылы, алардын пайда болушу, топуракка сиңиши жана алардын математикалык моделдери каралды. Нымдуулуктун топуракка сиңишинде «топурак – суу» татаал системасы үчүн гидродинамиканын теориясы жана ыкмасы колдонулду. Инфильтрациялык жана фильтрациялык процесстер каралып, Фиктин классикалык теңдемеси үчүн ар башка түрдөгү чыгарылыштары алынды.

***Негизги сөздөр:** каныкпаган чөйрө, инфильтрация, ным өткөрүмдүүлүк, кысылбаган суюктук, топурак - жер кыртышы, нымдуулук функциясы, тартылуу күчү, диффузиянын коэффициенти.*

Для однородного нелинейного уравнения движения жидкости предлагается ряд аналитических решений. Кроме того, были рассмотрены математические модели движения влаги в ненасыщенной среде, их происхождение и поглощение в почве. При поглощении влаги в почву для сложной системы «почва – вода» были использованы теории и методы гидродинамики. Рассматриваются инфильтрационные и фильтрационные процессы, получены различные решения для классического уравнения Фикка.

***Ключевые слова:** ненасыщенная среда, инфильтрация, влагопроводность, несжимаемая жидкость, почва – грунт, функция влажности, гравитационная сила, коэффициент диффузии.*

For a homogeneous nonliner of equation, fluid motion a number of analytical solutions are proposed. In addition, mathematical models of the movement of moisture in an unsaturated medium, their origin and absorption in the soil were considered. Theories and methods of hydrodynamics were used to absorb moisture into the soil for a complex "soil-water" system. Infiltration and filtration processes are considered, and various solutions for the classical Fick equation are obtained.

***Key words:** unsaturated medium, infiltration, moisture conductivity, incompressible fluid, soil, function of moisture, gravitational force, coefficient of diffusion.*

Бизге белгилүү болгондой, тоонун этектериндеги көчкүнүн ээлеген ордуна жараша жер көчкү процесстери төмөнкүдөй бөлүнөт: жер кыртышынын температурасы жана нымдуулуктун сезондук термелүүсү, жер көчкүнүн калыңдыгынын тереңдиги, жылышуу бети.

Жер көчкүнүн пайда болушунун негизги себептери жаан-чачын, кардын эриши жана башкалар эсептелет. Жер көчкүнүн көлөмүнүн тереңдиги негизинен жер астындагы суулардын таасири астында болот. Жер көчкүлөрдү пайда кылган жана алардын өнүгүшүнө көмөк кылган жагдайларды эки класска бөлүүгө болот: көз каранды эмес же негизги жана өз алдынча эркин. Көз каранды эмес же негизги класстарга тоо этектеринин геологиялык түзүлүшү жердин рельефи, территориянын сейсмикалык активдүүлүгү кирет. Өз алдынча эркин жагдайга гидрогеологиялык шарттар, жер бетиндеги агын суулар, жер кыртышынын үстүнкү катмары ошондой эле тоо тектеринин сезондук тоңушу жана эриши кирет. Математикалык көз караштa, эки класс тең жер көчкү процесстеринин пайда болушунун жетиштүү жана зарыл шарты болуп саналат. Жер көчкү процесстерин алдын ала изилдөө төмөнүдөй жыйынтыкка келүүгө мүмкүн экенин көрсөтүп турат: жер алдындагы суулардын эсебинен тоо тектеринин негизги массасынын нымдуулук менен каныктыруу процесси жер көчкүлөрдүн пайда болушунун өнүгүшүн жана активдүүлүгүн аныктайт жана дагы нөшөрлөгөн жаандар, кардын эриши, тоо этегиндеги агын суулар фильтрация жана инфильтрация процесстерин пайда кылат.

Жаан чачындын түшүү шарттары жана алардын жер көчкү болчу жерлерге тийгизген таасири тууралу айта кетсе болот. Тоо этектеринде кар тегиз эмес топтолот да, шамалдын негизинде алар чуңкур жерлерге көп санда түшөт да алардын ээриши бирдей эмес болот. Жаан-чачын сууларынын бирдей эмес бөлүштүрүлүшү жер кыртышынын өзүнө сууну сиңирүү же сиңирбей кармап туруу жөндөмдүүлүгүнөн, рельефдин шарттарынан көз каранды. Тоо боорунун эңкейиш жерлеринде суу адатта кармалбайт жана чуңкур жактарга агып топтолуп жер көчкүгө себепкер болот. Жер кыртышы үбөлөнгөн жерлерде суу кармалат, бирок бул суунун таасири энкейиштин туруктуулугуна жаандын жаашынын абсолюттук санынан көз каранды. Бул жерде белгилей кетчүү нерсе, жаандын жаашы менен топурактын үбөлөнүп жумшарганы кээ бир учурларда тоо тектериндеги, топурактагы ашыкча нымдуулукка алып келип капысынан көчкөн жер көчкүнү пайда кылат.

Жер көчкүнүн пайда болушу жана өнүгүүсү үчүн бардык келтирилген негизги факторлордун анализи

төмөнкү жыйынтыкты берүүгө мүмкүндүк берет: гидрогеологиялык жана гидрометеорологиялык факторлор жер көчкү процесстери үчүн чоң мааниге ээ.

Нымдуулуктун топуракка сиңишинде, "топурак - суу" татаал системасы үчүн гидродинамиканын теориясы жана ыкмасы колдонулат. Албетте, топурак ичиндеги суюктук кыймылы, гидрогеологиялык жана гидрометеорологиялык шарттардын негизинде жер кыртышынын туруктуулугуна таасирин тийгизип, бул тең салмактуулуктун бузулушуна жана туруктуулукту жоготууга алып келет. Мунун баары, жер көчкүнүн пайда болушу, өнүгүшү жана жер көчкүнүн кыймылынын механизми тоо этектеринде суюктук динамикасынын таасирине байланыштуу деп айтса болот.

Ар кандай чөйрөлөрдө ар түрлүү фильтрациялык жана инфильтрациялык суюктуктун агымын моделдеп, белгилүү бир жөнөкөйлөтүп берилген физико-механикалык, заманбап математикалык аппаратты колдонуп, этектерде жүрүп жаткан процесстер боюнча сандык жана сапаттык бааларды бере алабыз жана көчкүлөрдү жандандыруу жана өнүктүрүүчү белгилүү маалыматтарды алабыз. Изилденүүчү жердеги суу агымынын кыймылынын түрүн жана мүнөзүн билүү менен, аларды моделдөө үчүн фильтрациянын тендемесин тандоого болот жана баштапкы жана четки шарттар түрүндө кошумча маалыматтар киргизилет.

Сел – заматта капысынан жүрүүчү тоо ташкыны, нөшөрлөнгөн жамгырдан, кар менен муздун интенсивдүү эрүүсү менен, ошондой эле чон запастагы кесектүү материалдары бар өрөөндөгү дамбаларды жана суу сактагычтарды бузуучу кубулуш. Селдин пайда болушу дайыма көп сандаган жаан чачын же интенсивдүү кардын ээриши менен байланышкан. Селдердин жүрүшү биздин Республикада кеңири тараган, аларга көптөгөн селдердин түрү кирет, ал адатта кырсыктуу мүнөзгө кирбейт, ал эми чон сууларга кошулганда күчтүү сел агымдарын пайда кылат жана адамзатка чоң зыян келтирет. Ошондуктан бул процесстерди тактоо үчүн, башкача айтканда агым болгучакты биринчиден жердеги нымды топтоо процессин үйрөнүү керек, андан кийин жер кыртышындагы суунун кыймылынын математикалык моделин колдонуп, ушул процесстер үчүн баштапкы-четки маселелер чыгарылат.

Гидродинамикалык тен салмактуулук шартында аныкталган, топурактагы сууну кармоо жөндөмдүүлүгү, анын мүнөзү, ным алмашуу жана ным өткөрүмдүүлүгү сыяктуу маселелерди чечүү каралат. Акыркы жылдары топурактын гидрологиясынын гидромеханикалык багыты өнүгүүдө. Топурактын физико-механикалык касиетин, мүнөзүн жана топурак бөлүкчөлөрүнүн арасындагы өз ара сыйымдуулугун башка багыт карайт. Топурактын ичиндеги нымдуулуктун кыймылы көпчүлүк учурда суу ээлеген геометриялык мейкиндиктин өзгөрүшүнөн көз каранды. Топурактын гидрологиялык бул багыты дисперсиялык чөйрөдөгү физико-химиялык механикага таандык.

Бүгүнкү күндө топурак гидрологиялык процесстердин математикалык моделдерин иштеп чыгууда төмөнкүдөй этаптар жүргүзүлгөн деп атоого болот: жер кыртышына нымдуулуктун кириши менен чыгышын изилдөө механизми жана алардын кыймылынын негизги мыйзамын каттоо; тендемелердин жалпы системасын түзүү жана анын жөнөкөйлөтүлгөн вариантын тандоо; изилденип жаткан объектин схемасын жана чектик маселелердин математикалык жазылышын түзүү; каралып жаткан объекти моделдөө, тендеменин негизги параметрлерин аныктоо жана четки шарттарды тактоо; алгоритмдерди, программаларды жана чектик маселелерди иштеп чыгуу; математикалык моделдөө түзгөн "ири бүртүкчөлөргө" байланыштуу каталарды баалоо; лабораториялык жана жаратылыш байкоолорунун эсептөөлөрүнүн жыйынтыктарын салыштыруу.

Моделдөөнүн биринчи этаптарында, жер үстүндөгү күчтөрдүн жана кубулуштардын толугу менен канчалык денгээлде изилденгендиги тууралуу бөлүм турат. Чындыгында, жер кыртышына суунун сиңүү процессин аныктоодо, аларды нымдуулук менен толтуруу жана каныктыруу суунун жерге тартылуу күчтөрү, жер кыртышына таасирин берүүсү негизги фактор болуп саналат. Бул түшүнүктүн маанилүүлүгү, Ньютон законунан качан гана четтөөлөр мүмкүн болгон учурда, суу чыналуунун өтө чон эмес жылышынын чегинде болот. Белгилүү бир шарттарда ал тургай билинер билинбес, толугу менен кыймылы билинбеген көлөмдүү суюктуктун балансты же суюктуктун чополуу топурак аркылуу өткөн кыймылын карап чыгууда маанилүү ролду ойнойт жана кыртыштын кыймылынын мүнөзүнө олуттуу таасирин тийгизе алат.

Инфильтрациялык процесстерди изилдөө үчүн, качан кысылбаган суюктук жаан-чачын, сугаруу, жердин үстүндөгү агын сууларды чогултуунун эсебинен жер кыртышына же тоолуу дөбөлүү жерлердин үстүнө киргенде, нымдуулук функциясы же нымдуулуктун концентрациясы каралат. Инфильтрациянын негизги тендемелеринин бири же каныкпаган чөйрөдөгү бир өлчөмдүү учур үчүн суюктуктун кыймылынын, тартылуу күчү жок болгон тендемеси [2,3] түрүндө болот

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right] \qquad (1)$$

Фиктин тендемеси деп аталган бул классикалык тендеме, жер кыртышындагы суюктуктун бир өлчөмдүү вертикалдык инфильтрациясын сүрөттөйт жана бул жекече туундудагы сызыктуу эмес дифференциалдык тендеме. Бул жерде $W(x,t)$ – нымдуулуктун белгисиз функциясы, $D(W)$ – диффузиянын коэффициенти.

Бул тендемени чыгарыш үчүн $D(W) = D_0 + D_1W + D_2W^2 + \cdots$, маанисин алгачкы эки мүчөсү менен чектелген диффузиянын коэффициенттерине ажыратып, жыйынтыгында ар башка түрдөгү чыгарылышы бар, сызыктуу эмес тендемени алабыз. $D(W)$ ордуна төмөнкү жаны функцияны киргизебиз

$$\overline{W}(x,t) = D_0 + D_1W, \qquad (2)$$

жана бул функцияны (1) ге коюп төмөнкү түрдөгү сызыктуу эмес тендемени алабыз

$$W_t = WW_{xx} + W_x^2 \qquad (3)$$

I. (3) тендеменин чыгарылышын төмөнкүчө автомодельдик түрдө чыгарабыз [1]

$$W(x,t) = t^{2n-1}f(\xi), \qquad \xi = x/t^n \qquad (4)$$

$W_t,\ W_x,\ W_{xx}$ жекече туундуларын аныктайбыз,

$$W_t = t^{2n-2}[(2n-1)f - n\xi f'],$$

$$W_x = t^{n-1}f', \qquad W_{xx} = t^{-1}f''$$

жана аларды (3) коюп, жыйынтыгында экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык тендемеге ээ болобуз

$$ff'' + f'^2 + n\xi f' - (2n-1)f = 0 \qquad (5)$$

(5) тендеменин жалпы чыгарылышын табуу өтө татаал. Бирок, анын чыгарылышын экинчи даражадагы полином түрүндө тапса болот

$$f(\xi) = C_0\xi^2 + C_1\xi + C_2 \qquad (6)$$

Жыйынтыгында $f(\xi) = \frac{\xi^2}{2} + C_2$ ээ болобуз. (4)тү эсепке алсак, изделүүчү ным өткөрүмдүү функция төмөнкүчө жазылат

$$W(x,t) = (x^2 + C_2t^2)/2t \qquad (7)$$

n=1 болгондо чыгарылыш төмөнкү түрдө болот

$$W(x,t) = C_1x + C_1^2t, \qquad (8)$$

акыры, n=0 болгондо төмөнкүдөй чыгарылышка ээ болобуз

$$W(x,t) = -(x^2 - 6C_1x + 9C_1^2)/t \qquad (9)$$

II. (3) тендемесинин чыгарылышын жалпы түрдө издейбиз

$$W(x,t) = f_0(\xi)T(t), \quad \xi = \frac{x}{R(t)}, \qquad (10)$$

мында, $T(t)$, $R(t)$ азырынча белгисиз функция. W_t, W_x, W_{xx} жеке туундуларын аныктайбыз жана (3)тү изилденүүчү тендемеге коюп, төмөнкүнү алабыз

$$\frac{T'R^2}{T^2}f_0 - \frac{RR'}{T}\xi f'_0 = f_0f''_0 + f_0'^2 \qquad (11)$$

Азыркыга чейин $T(t)$, $R(t)$ ар кандай функциялар болчу, ошондуктан $\frac{T'R^2}{T^2} = -A\frac{RR'}{T}$ аткарылышы талап кылынат. Акыркы тендемеден төмөнкүлөр келип чыгат

$$R(t) = T(t)^{-A} \quad \text{же} \quad T(t) = [R(t)]^{-1/A} \qquad (12)$$

анда (11) тендеме $\frac{T'R^2}{T^2}(f_0 + A\xi f'_0) = f_0f''_0 + f_0'^2$ түрдө жазылат, башкача айтканда бул жерде өзгөрмөлөрдү ажыратуу болду

$$\frac{f_0f''_0 + f_0'^2}{A\xi f'_0 + f_0} = \frac{T'R^2}{T^2} = -B, \qquad (13)$$

мында B - турактуу бөлүштүрүү. $T(t)$, $R(t)$ жана $f_0(\xi)$ аныкташ үчүн жөнөкөй сызыктуу эмес теңдемени алабыз

а. $T'^{R^2} + BT^2 = 0.$

б. $f_0f''_0 + f_0'^2 + AB\xi f'_0 + Bf_0 = 0. \qquad (14)$

(14)төгү биринчи тендеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат

$$R(t) = \left[\frac{A^2B}{2A+1}(C_0+t)\right]^{\frac{A}{2A+1}},$$

$$T(t) = \left[\frac{A^2B}{2A+1}(C_0+t)\right]^{-\frac{A}{2A+1}} \qquad (15)$$

Изилдөөлөр көрсөткөндөй, качан $A = 1$ жана $A = 1/2$ болгон эки учурда (14)төгү экинчи тендеме интегралданат.

Экинчи тендемени ($A = 1$ болгондо) эки жолу интегралдап, η_0 ар кандай параметринен көз каранды болгон, $f_0(\xi) = \frac{1}{2}B(\eta_0^2 - \eta^2)$ түрдөгү (14б) сызыктуу эмес тендемесинин чыгарылыштар көптүгүн алабыз. $\xi = \eta_0$ болгондо бул чыгарылыш нөлгө барабар. Биринчи жана экинчи туунду бул чекитте нөлгө айланат, ал (14) дифференциалдык тендемеден келип чыгат. Ошондуктан бардык $\eta \geq \eta_0$ болгондо функция нөлгө тендеш барабар. (3) баштапкы тендеменин так жекече чыгарылыштарынын көптүгү булар боюнча төмөнкүчө жазылат

$$W(x,t) = \begin{cases} \frac{B}{3}(\eta_0C_0 + t)^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{B}{2}(\eta_0^2 - \eta^2\right], & 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ 0, \quad \eta_0 < \eta < \infty \end{cases} \qquad (16)$$

мында $\xi = \frac{x}{R(t)} = x\left[\frac{B}{3}(C_0+t)\right]^{-\frac{1}{3}}$

экинчи учурда, A=1/2 болгондо төмөнкү чыгарылышка ээ болобуз

$$f_0(\xi) = \begin{cases} \eta^{1/2}\left[\frac{B}{3}\left(\eta_0^{3/2} - \eta^{3/2}\right)\right], 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad \eta_0 - const \\ 0, \quad \eta \leq \eta < \infty \end{cases}$$

Ошондуктан, (3) квазисызыктуу параболалык тендемеге туура келчү так чыгарылыштарынын тобу төмөнкүчө болот

$$W(x,t) = \begin{cases} \frac{B}{8}(C_0+t)^{1/4}\eta^{1/2}\left[\frac{B}{3}\left(\eta_0^{3/2} - \eta^{3/2}\right)\right], 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ 0, \quad \eta \leq \eta < \infty \end{cases} \qquad (17)$$

бул жерде $\eta = x[B(C_0+t)/8]^{-1/2}$ мында В жана η_0 анык болуп эсептелет, анткени C_0 дон жеңил кутулабыз эгерде убакыт боюнча жылдырсак, ал эми (3) теңдемеси жылдырууга салыштырмалуу инварианттуу.

Ошентип, сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык тендемеге туура келчү так чыгарылыштарды издеп таптык. Мындай учурлар өтө сейрек кездешет. Ошондуктан бул жерде жаңы ыкма менен (4,10) түрүндөгү сызыктуу эмес кадимки тендеме алынды жана (3) тендеменин так чыгарылышын табылды. Эгерде баштапкы – четки шарттарды алынган чыгарылышка койсок, анда турактуу интегралдоону аныктаса болот.

Адабияттар:

1. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. - М., 1976 - 352с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. – 576 с.
3. Кулик В.Я. Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований, в сб. «Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва – растение – воздух». - Л., 1972.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Чечейбаев Б.