

Исаев А.Д.

РИККАТИ ТЕҢДЕМЕСИ ЖАНА АЛМАЗ БЕЙДИН ЫКМАСЫ

Исаев А.Д.

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ И МЕТОД АЛМАЗ БЕЯ

A.D. Isaev

THE RICCATI'S EQUATION AND THE ALMAZ BEY'S METHOD

Анализ метода с применением общеизвестных теоретических расчётов, представленных в книге А.И.Егорова «Уравнения Риккати», с последующей проверкой сходимости функций решений на Mathcad 11.

УДК: 517.923+517.933

Макалада Риккати скалярдык теңдемесинин жаңы ыкма аркылуу табылган аналитикалык чыгарылышы менен башка ыкмалардан келип чыккан чыгарылыштардын жакындашуулары каралат.

Негизги сөздөр: *ийрилик теңдемеси, Риккати теңдемеси.*

В статье рассматривается сходимость общего решения скалярного уравнения Риккати, полученное вышеуказанным методом, с другими общеизвестными решениями.

Ключевые слова: *уравнение кривизны, уравнение Риккати.*

The convergence of the general solution of the Riccati equation obtained by the above-mentioned method with other well-known solutions is considered in the article.

Key words: *the equation of the curvature, the Riccati equation.*

I. Введение. В продолжении ряда работ, посвященных скалярным уравнениям Риккати [3,4], хотелось бы остановиться и сопоставить решения, полученные нами, с глубоким анализом произведённым в книге А.И.Егорова «Уравнения Риккати», получившей признание специалистов, интересующихся данной областью математики.

Общеизвестно, что методы применяемые при решении уравнений Риккати зависят от коэффициентов, отсюда и их многообразие. Каждый метод разработанный для решения нелинейных дифференциальных уравнений обязательно апробируется на уравнениях Риккати, о свойствах которых, мы уже знаем. Однако не меньшую актуальность имеет и прикладная составляющая подобных уравнений, решение которых может создать большой прорыв в области проблем аэро и гидродинамики [1].

II.0 Теоретическая часть.

(Обозначения и символы будут употребляться с некоторыми изменениями. Суть останется прежней)

Напомним [3,4]

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(t) \cdot X^2(t) + b(t) \cdot X(t) + c(t)$$

$$X(t) = e^{W(\theta)} ; \theta = \theta(t) \quad (1)$$

поиск функции вели, как

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) = e^{W(\theta)} = X(t) ; \frac{dS}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos(\theta)} - \operatorname{tg}(\theta) = e^{-W(\theta)} = \frac{1}{X(t)}$$

где,

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(t) \cdot X^2(t) + b(t) \cdot X(t) + c(t) \Rightarrow X(t) \cdot \frac{dW(\theta)}{dt} = a(t) \cdot X^2(t) + b(t) \cdot X(t) + c(t)$$

$$a(t) \cdot X^2(t) + \left(b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} \right) \cdot X(t) + c(t) = 0 \quad \text{с одной стороны.}$$

С другой стороны имели,

$$\frac{dW(\theta)}{dt} = \frac{f(t)}{\cos^2(\theta)} = a(t) \cdot X(t) + b(t) + \frac{c(t)}{X(t)}$$

$$\frac{1}{1 - \sin^2(\theta)} = \frac{1}{(1 - \sin(\theta)) \cdot (1 + \sin(\theta))} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sin(\theta)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin(\theta)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sin(\theta)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin(\theta)} = \frac{b(t) + a(t) \cdot e^W + c(t) \cdot e^{-W}}{f(t)}$$

$$\frac{f(t)}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \sin(\theta)} + \frac{1}{1 + \sin(\theta)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\theta) \cdot d\theta}{dt} \left(\frac{1}{1 - \sin(\theta)} + \frac{1}{1 + \sin(\theta)} \right) = b(t) + a(t) \cdot e^W + c(t) \cdot e^{-W}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \left(\underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta)}}_{X(t)=e^W} + \underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}}_{\frac{1}{X(t)=e^{-W}}} \right) = b(t) + a(t) \cdot \underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta)}}_{X(t)=e^W} + c(t) \cdot \underbrace{\frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}}_{\frac{1}{X(t)=e^{-W}}}$$

$$\left(a(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot X^2(t) + b(t) \cdot X(t) + \left(c(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

далее,

$$1) \quad a(t) \cdot X^2(t) + \left(b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} \right) \cdot X(t) + c(t) = 0$$

$$2) \quad \left(a(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot X^2(t) + b(t) \cdot X(t) + \left(c(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$1) - 2) \rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot X^2(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} \cdot X(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

поиск частного решения уравнения велся при условии малых углов текущих точек:

$$-35^\circ \leq \theta \leq +35^\circ$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d \sin(\theta)}{dt} = \frac{dW(\theta)}{dt} \quad \text{тогда} \quad 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \sin(\theta)}{dt} \cdot X^2(t) - \frac{d \sin(\theta)}{dt} \cdot X(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d \sin(\theta)}{dt}$$

$$0 = X^2(t) - 2 \cdot X(t) + 1 \Rightarrow X(t)_{1,2} = 1 = \frac{1 + \sin(\theta)_{1,2}}{\cos(\theta)_{1,2}}$$

$\frac{d\overbrace{W(\theta)}^{\sin(\theta)}}{dt} = a(t) \cdot X(t) + b(t) + \frac{c(t)}{X(t)} \Rightarrow \frac{d \sin(\theta)}{dt} = a(t) + b(t) + c(t)$, что при подстановке в уравнение 2) приводит к частному решению.

Общее решение уравнения находилось в виде подстановки $\frac{dW(\theta)}{dt} = \frac{1}{1 - \sin^2(\theta)} \cdot \frac{d \sin(\theta)}{dt}$

в уравнение $a(t) \cdot X^2(t) + \left(b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} \right) \cdot X(t) + c(t) = 0$

Заметим, что уместно использовать $W(\theta) = \text{Arth}(\sin(\theta))$ либо $W(\theta) = \sum_{n=0}^N \frac{\sin(\theta)^{2 \cdot n + 1}}{2 \cdot n + 1} + C_W$ в зависимости от особых точек.

Тогда общее и частное решение уравнения Риккати:

$$\sin(\theta) = \int [a(t) + b(t) + c(t)] \cdot dt + C_\theta, \quad W(\theta) = \int \frac{1}{1 - \sin^2(\theta)} \cdot d \sin(\theta) + C_W$$

$$X(t)_1 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} + \left[b^2(t) - 2 \cdot b(t) \cdot \frac{dW(\theta)}{dt} + \left(\frac{dW(\theta)}{dt} \right)^2 - 4 \cdot a(t) \cdot c(t) \right]^{\frac{1}{2}}}{a(t)} \quad (2)$$

$$X(t)_2 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} - \left[b^2(t) - 2 \cdot b(t) \cdot \frac{dW(\theta)}{dt} + \left(\frac{dW(\theta)}{dt} \right)^2 - 4 \cdot a(t) \cdot c(t) \right]^{\frac{1}{2}}}{a(t)}$$

$$X(t)_{\text{ч.п3}} = e^{\sin(\theta)_{\text{ч.п3}}} - \text{частное решение.}$$

Продолжив решение, при малых углах текущих точек, разрешённое относительно:

$$X(t) = e^{\sin \theta}$$

$\frac{d\overbrace{W(\theta)}^{\sin(\theta)}}{dt} = a(t) \cdot X(t) + b(t) + \frac{c(t)}{X(t)} \Rightarrow \frac{d \sin(\theta)}{dt} = a(t) + b(t) + c(t)$, что при подстановке в уравнения 1 и 2 приведёт к частному решению.

$$X(t)_{\text{ч.п1}} = e^{\sin(\theta)_{\text{ч.п1}}} = \frac{c(t)}{a(t)} \quad X(t)_{\text{ч.п2}} = e^{\sin(\theta)_{\text{ч.п2}}} = \frac{-[c(t) - a(t) - b(t)]}{-a(t) + b(t) + c(t)} \quad \text{соответственно} \quad (3)$$

II.1. Метод подстановки.

Классический путь, согласующийся с [1].

$X_{об.р} = X_{ч.р} + U$ где $X_{об.р}$ – общее решение. $X_{ч.р}$ – частное решение.

$$\frac{dX_{об.р}}{dt} = a(t) \cdot X_{об.р}^2 + b(t) \cdot X_{об.р} + c(t)$$

$$\frac{dX_{ч.р}}{dt} + \frac{dU}{dt} = a(t) \cdot [X_{ч.р} + U]^2 + b(t) \cdot [X_{ч.р} + U] + c(t)$$

$$\frac{dX_{ч.р}}{dt} + \frac{dU}{dt} = \underline{a(t) \cdot X_{ч.р}^2} + 2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} \cdot U + a(t) \cdot U^2 + \underline{b(t) \cdot X_{ч.р}} + b(t) \cdot U + \underline{c(t)}$$

остаётся

$$\frac{dU}{dt} = 2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} \cdot U + a(t) \cdot U^2 + b(t) \cdot U \quad \text{подстановка} \quad U = \frac{1}{Z}$$

приведёт к линейному дифференциальному уравнению.

$$\frac{-1}{Z^2} \cdot \frac{dZ}{dt} = \frac{a(t)}{Z^2} + [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot \frac{1}{Z} \Rightarrow \frac{-dZ}{dt} = a(t) + [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot Z$$

Подстановка $Z = u \cdot v$ общеизвестный метод.

$$\frac{-dZ}{dt} = a(t) + [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot Z \Rightarrow -u \cdot \frac{dv}{dt} - v \cdot \frac{du}{dt} = a(t) + [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot v \cdot u$$

$$0 = v \cdot \underbrace{\frac{du}{dt}}_0 + a(t) + u \cdot \underbrace{[2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot v + \frac{dv}{dt}}_0$$

$$d \ln \left| \frac{1}{v} \right| = [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot dt \Rightarrow \ln \left| \frac{1}{v} \right| = \int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] \cdot dt + \ln |C_v|$$

$$v(t) = \frac{1}{C_v \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt}}; \quad du = -\frac{a(t)}{v(t)} \cdot dt \Rightarrow u(t) = -C_u \cdot \int a(t) \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt} \cdot dt + C_u$$

$$Z(t) = u(t) \cdot v(t) = \left[-C_u \cdot \int a(t) \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt} \cdot dt + C_u \right] \cdot \frac{1}{C_v \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt}}$$

$$U(t) = \frac{1}{Z(t)} = \frac{1}{\left[-C_u \cdot \int a(t) \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt} \cdot dt + C_u \right] \cdot \frac{1}{C_v \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt}}}$$

Общее решение уравнения

$$X_{об.р} = X_{ч.р} + U = X_{ч.р} + \frac{1}{\left[-C_u \cdot \int a(t) \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt} \cdot dt + C_u \right] \cdot \frac{1}{C_v \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{ч.р} + b(t)] dt}}} \quad (4)$$

II.2 Вывод общего решения уравнения Риккати, когда известны три частных его решения.

В связи этим имея в наличии три частных решения уравнения Риккати поступим, как [1].

$$X(t)_{q.p3} = e^{\sin(\theta)_{q.p3}}; \quad X(t)_{q.p1} = e^{\sin(\theta)_{q.p1}} = \frac{c(t)}{a(t)}; \quad X(t)_{q.p2} = e^{\sin(\theta)_{q.p2}} = \frac{-[c(t) - a(t) - b(t)]}{-a(t) + b(t) + c(t)}$$

$$X_{об.p} = X_{q.p} + U; \quad U = \frac{1}{Z}; \quad Z_{об.p} = \frac{1}{X_{об.p} - X_{q.p}}$$

$$Z_{q.p1} = \frac{1}{X_{q.p2} - X_{q.p1}}; \quad Z_{q.p2} = \frac{1}{X_{q.p3} - X_{q.p1}}$$

согласно общее решение находится через формулу $Z_{об.p} = Z_{q.p1} + C \cdot (Z_{q.p2} - Z_{q.p1})$

где C – произвольная постоянная. Это решение можно представить и

$$Z_{об.p} = \frac{1}{X_{q.p2} - X_{q.p1}} + C \cdot \left(\frac{1}{X_{q.p3} - X_{q.p1}} - \frac{1}{X_{q.p2} - X_{q.p1}} \right)$$

$$\text{Отсюда } Z_{об.p} = \frac{1}{X_{об.p} - X_{q.p}} \Rightarrow X_{об.p} = X_{q.p} + \frac{1}{Z_{об.p}}$$

$$Z_{об.p} = \frac{1}{e^{\sin(\theta)_{q.p2}} - e^{\sin(\theta)_{q.p1}}} + C \cdot \left(\frac{1}{e^{\sin(\theta)_{q.p3}} - e^{\sin(\theta)_{q.p1}}} - \frac{1}{e^{\sin(\theta)_{q.p2}} - e^{\sin(\theta)_{q.p1}}} \right)$$

$$X_{об.p} = e^{\sin(\theta)_{q.p1}} + \frac{1}{e^{\sin(\theta)_{q.p2}} - e^{\sin(\theta)_{q.p1}}} + C \cdot \left(\frac{1}{e^{\sin(\theta)_{q.p3}} - e^{\sin(\theta)_{q.p1}}} - \frac{1}{e^{\sin(\theta)_{q.p2}} - e^{\sin(\theta)_{q.p1}}} \right)$$

$$X(t)_{об.p} = \frac{c(t)}{a(t)} + \frac{1}{\left[\frac{-[c(t) - a(t) - b(t)]}{-a(t) + b(t) + c(t)} \right] - \frac{c(t)}{a(t)}} + C \cdot \left(\frac{1}{e^{\int [a(t)+b(t)+c(t)] dt + C_0} - \frac{c(t)}{a(t)}} - \frac{1}{\left[\frac{-[c(t) - a(t) - b(t)]}{-a(t) + b(t) + c(t)} \right] - \frac{c(t)}{a(t)}} \right) \quad (5)$$

Общее решение уравнения.

II.3 Решение скалярного уравнения Риккати с использованием метода подстановки Алмаз Бея.

Начнём с подстановки: $X_{об.p} = \frac{A \cdot X_{q.p}}{a(t)}$ где, A – постоянная уравнения Риккати.

$X_{q.p} = X_{q.p}(t)$ – искомое частное решение.

$$A \cdot \frac{d \left[\frac{X_{q.p}}{a(t)} \right]}{dt} = \frac{a(t) \cdot A^2 \cdot X_{q.p}^2}{a(t)^2} + \frac{b(t) \cdot A \cdot X_{q.p}}{a(t)} + c(t)$$

$$\frac{A}{a(t)} \cdot \frac{dX_{q.p}}{dt} - \frac{A}{a(t)^2} \cdot \frac{da(t)}{dt} \cdot X_{q.p} = \frac{a(t) \cdot A^2 \cdot X_{q.p}^2}{a(t)^2} + \frac{b(t) \cdot A \cdot X_{q.p}}{a(t)} + c(t)$$

$$\frac{dX_{q.p}}{dt} - \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \cdot X_{q.p} = A \cdot X_{q.p}^2 + b(t) \cdot X_{q.p} + \frac{a(t) \cdot c(t)}{A}$$

$$\frac{dX_{q.p}}{dt} = \underbrace{A}_{a_1} \cdot X_{q.p}^2 + \underbrace{\left[b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right]}_{b_1} \cdot X_{q.p} + \underbrace{\frac{a(t) \cdot c(t)}{A}}_{c_1} \quad \frac{dX_{q.p}}{dt} = a_1(t) \cdot X_{q.p}^2 + b_1(t) \cdot X_{q.p} + c_1(t)$$

Дальнейшая подстановка: $X_{ч.р} = X_1 - \frac{b_1(t)}{2 \cdot A} \Rightarrow X_{ч.р} = X_1 - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A}$

$\frac{dX_1}{dt} = A \cdot X_1^2 + c_2(t)$ – один из видов уравнения Риккати. (6)

$$\frac{d \left[X_1 - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right]}{dt} = A \cdot \left[X_1 - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right]^2 + \left[b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right] \cdot \left[X_1 - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right] + \frac{a(t) \cdot c(t)}{A}$$

$$\frac{dX_1}{dt} - \frac{d \left[\frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right]}{dt} = A \cdot X_1^2 - \frac{2 \cdot A \cdot \left[b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right] \cdot X_1}{2 \cdot A} + A \cdot \left[\frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right]^2 + \left[b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right] \cdot X_1 - \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \left[b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right]^2 + \frac{a(t) \cdot c(t)}{A}$$

$$\frac{dX_1}{dt} = A \cdot X_1^2 + \underbrace{\left[\frac{d \left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{dt} - \frac{1}{4 \cdot A} \cdot \left[b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right]^2 + \frac{a(t) \cdot c(t)}{A} \right]}_{c_2(t)}$$

$\frac{dX_1}{dt} = A \cdot X_1^2 + c_2(t) \Rightarrow$ Общее решение этого уравнения есть

$X_1(t) = B \cdot \frac{e^{\sin(\theta)_{ч.р}}}{a_2(t)} \Rightarrow X_1(t) = B \cdot \frac{c_2(t)}{[a_2(t)]^2}$

$X_{ч.р} = X_1 - \frac{b_1(t)}{2 \cdot A} \Rightarrow X_{ч.р} = B \cdot \frac{c_2(t)}{[a_2(t)]^2} - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A}$

$X_{об.р} = \frac{A \cdot X_{ч.р}}{a(t)} \Rightarrow X_{об.р} = \frac{A}{a(t)} \cdot \left[B \cdot \frac{c_2(t)}{[a_2(t)]^2} - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right]$ (7)

Общее решение уравнения.

III. Сходимость решений полученных разными методами на Mathcad 11.

Возьмём общие решения полученные разными способами.

$$X(t)_{01} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} + \left[b^2(t) - 2 \cdot b(t) \cdot \frac{dW(\theta)}{dt} + \left(\frac{dW(\theta)}{dt} \right)^2 - 4 \cdot a(t) \cdot c(t) \right]^{\frac{1}{2}}}{a(t)}$$

$$X(t)_{02} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{b(t) - \frac{dW(\theta)}{dt} - \left[b^2(t) - 2 \cdot b(t) \cdot \frac{dW(\theta)}{dt} + \left(\frac{dW(\theta)}{dt} \right)^2 - 4 \cdot a(t) \cdot c(t) \right]^{\frac{1}{2}}}{a(t)}$$

$$X(t)_1 = X_{u.p} + U = X_{u.p} + \frac{1}{\left[-C_v \cdot \int a(t) \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{u.p} + b(t)] dt} \cdot dt + C_u \right]} \cdot \frac{1}{C_v \cdot e^{\int [2 \cdot a(t) \cdot X_{u.p} + b(t)] dt}}$$

$$X(t)_2 = X_{u.p} + \frac{1}{Z_{об.p}}$$

$$X(t)_3 = \frac{A}{a(t)} \cdot \left[B \cdot \frac{c_2(t)}{[a_2(t)]^2} - \frac{\left(b(t) + \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{da(t)}{dt} \right)}{2 \cdot A} \right]$$

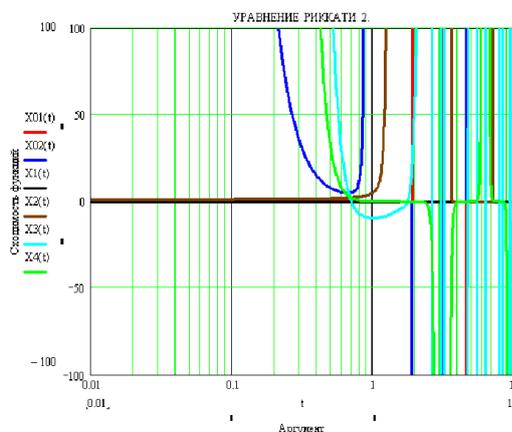
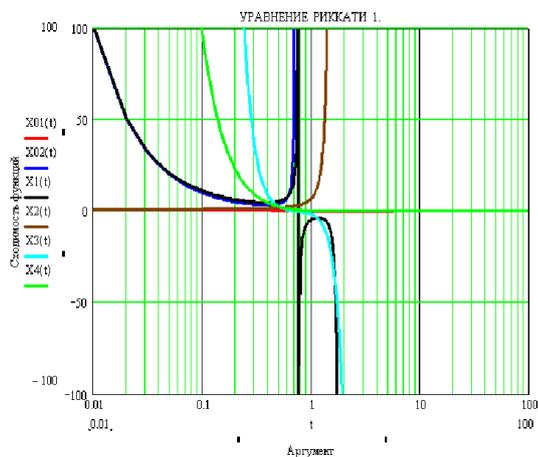


Рис 1. $a(t) = t^3 + t$; $b(t) = t^5$; $c(t) = 1$ Рис 2. $a(t) = \tan^3(t)$; $b(t) = t^5 \cdot \sin(t)$; $c(t) = \cos(t)$

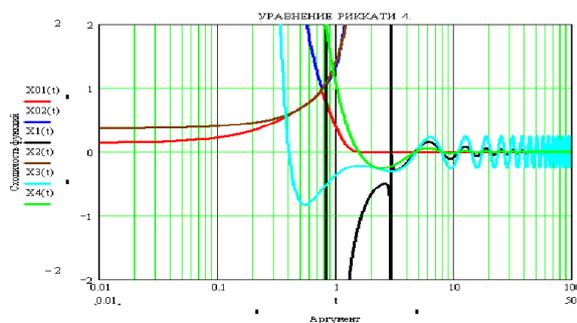
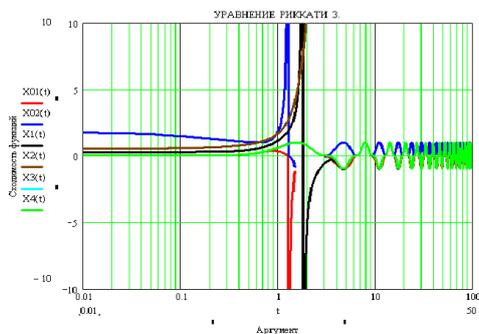


Рис 3. $a(t) = 1$; $b(t) = 0$; $c(t) = \sin^3(t)$ Рис 4. $a(t) = t$; $b(t) = 0$; $c(t) = \cos(t)$

IV. Вывод. Анализ функций решений, где коэффициенты и постоянные интегрирования выбирались произвольным образом дают удовлетворительную сходимость с учётом сложности взятия интегралов от некоторых методов.

Литература:

1. А.И.Егоров. Уравнение Риккати, («Физматлит», Москва 2001, стр140-157)
2. В.Ф.Зайцев. А.Д.Полянин. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, («Физико-Математическая литература», Москва 2001,стр575)
3. А.Д. Исаев. Нелинейный поперечный изгиб, интеграл вероятности и уравнение Риккати, («Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана», Бишкек 2016, №5, стр20-36)
4. А.Д. Исаев. Об одном общем решении уравнения Риккати, («Вестник КГПУ им. Арабаева», Бишкек 2016, №2, стр--)

Посвящается Омуралиеву Асану Сыдыгалиевичу!!

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Омуралиев А.С.
