Абдылдаев Э.К., Миркасимова Т.Ш., Курманбек уулу Т.

ВЕКТОРДУК МЕТОДДОРДУ ГЕОМЕХАНИКАДА КОЛДОНУУ

Абдылдаев Э.К., Миркасимова Т.Ш., Курманбек уулу Т.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА В ГЕОМЕХАНИКЕ

E.K. Abdyldaev, T.Sh. Mirkasimova, Kurmanbek uulu T.

APPLICATION OF VECTOR METHOD IN GEOMECHANICS

УДК: 550.82:512.642

Бул макалада геомеханикадагы вектордук методдорду колдонуудагы математикалык катыштары келтирилген жана көрсөтмөлүүлүккө мисал катары вектордук таланы анализдөөнүн бир варианты каралган.

Негизги сөздөр: *метод, вектордук талаа, жаранка системасы, деформация, мейкиндик, изолиния, геомеханика.*

В данной статье приведены математические соотношения применения векторного метода в геомеханике и в качестве наглядного примера рассмотрен один из вариантов анализа векторного поля.

Ключевые слова: *метод, векторное поле, система трещин, деформация, пространство, изолиния, геомеханика.*

This article describes the use of mathematical relationships vector method to geomechanics and in one of the options the vector field analysis is considered an illustrative example.

Key words: *method, a vector field, the system of cracks, deformation, space, isoline, geomechanics.*

Направленный отрезок прямой – вектор находит свое применение в различных задачах математики, физики, механики, и в других отраслях фундаментальной, а также прикладной науки. В геомеханике векторный метод имеет исключительно большое значение, так как любая деформация массива горных пород носит направленный – векторный характер. Смысл векторного метода и его значение легко можно понять на конкретном примере. Рассмотрим сложение двух сил (двух векторов): P_1 и P_2. Графически эта задача сводится к построению в заданном масштабе параллелограмма сил (рис. 1а). Аналитический способ сложения двух сил (векторов) сводится к определению равно действующей R по формуле:

$$R == \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\gamma} \qquad (1)$$

По теореме синусов определяем α и β

$$\sin\alpha = \frac{P_2}{R}\sin\gamma; \sin\beta = \frac{P_1}{R}\sin\gamma \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{P_1 \sin\gamma}{P_2 + P_1 \cdot \cos\gamma}$$

Из этого параллелограмма сил можно построить два треугольника сил (рис. 1б). Как известно равнодействующая является замыкающей заданных векторов, а направлена она навстречу общему течению составляющих. Задача здесь не является однозначной, так как в двух треугольниках общее течение составляющих должно быть противоположным. Это условие необходимо для равновесия параллелограмма как нечто целого.

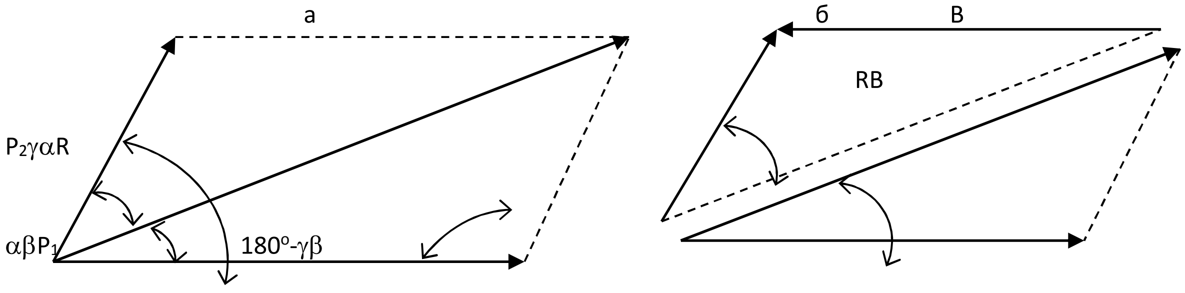

Рисунок 1. Параллелограмм сил

Важность указанных здесь моментов векторного метода становится совершенно ясной, если мы приводимый параллелограмм будем рассматривать как основание (фундамент) естественного структурного блока пород, образованного системами трещин в результате тектонических напряжений. В объемном пространстве векторное понятие можно заменить тензорным понятием. Однако, этим термином осложнять задачу не станем, а переходим к понятию параллелепипеда – призме, основанием которой является параллелограмм. В более обобщенном виде многогранники в кристаллографии часто именуется параллелоэдрами.

Параллелоэдры – выпуклые многогранники, которыми можно полностью заполнить трехмерное пространство с помощью их параллельных переносов. Элементарным исходным образом параллелоэдров является формы куба и правильная шести угольная призма. Необходимо отметить, что понятием параллелоэдров широко пользовались ученые кристаллографы при выводах всевозможных симметричных кристаллических форм в природе.

Например, известный кристаллограф Е.С. Федоров на основании анализа кристаллических форм и на основе закона параллелоэдров в условиях недр установил число возможных групп симметрии атомной структуры кристаллов – 230 пространственных групп. Эту же закономерность, одновременно с ним и независимо от него установил немецкий ученый – математик А. Шенфлис (1890). В анализе пространства недр методологические работы Федорова – Шенфлиса являются классическими.

Векторное произведение двух векторов a и b обозначается следующим образом: /a, b/, или a × b. В результате при умножении двух векторов получается третий вектор **c** в эвклидовом пространстве. Длина этого результирующего вектора равна произведению длин перемножаемых векторов на синус угла между ними:

$$|c| = |a|\,|b|\sin\gamma \qquad (3)$$

Это означает, что длина вектора **c** численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b. Вектор c перпендикулярен к плоскости векторов a и b. Эти три вектора a, b, c составляют так называемую правую тройку (правую ориентацию, правый репер). Понятие этого правила сводится к следующему: три вектора обозначим тремя пальцами правой руке: a – большой палец, b – указательный палец, c – средний палец; правые двое представляют плоскость ладони, а третий – перпендикулярно к этой ладони. Если исходные два вектора заданы своими декартовыми прямоугольными координатами: $a(x_1,y_1,z_1)$, $b(x_2,y_2,z_2)$, то их векторное произведение записывается в матричной форме, в виде определителя:

$$[a,b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

где i, j, k – единичные векторы (орты) правой прямоугольной декартовой системы координат. Другими словами орты составляют правую тройку. В частном случае это исходный единичный кубик.

Для нас представляет большой интерес учение о векторном пространстве, представляющее собой некоторое обобщение обычного трехмерного пространства[1]. В условиях пространства недр существуют множество полей векторного характера. Скажем электромагнитное, твердо-динамическое, гравитационное, геофизическое, геотектоническое, рудное, фазовое, металлогеническое и т.д. Одним словом в условиях недр имеет место так называемый «синергетический» процесс, т.е. совместное действие нескольких различных факторов. Понятие дивергенции и градиента являющихся характеристическими элементами векторного и скалярного потенциального поля вошли в геометрию недр в связи с построением поверхностей по методу П.К. Соболевского. В геомеханике эти методы могут быть использованы при решении многих вопросов, связанных с построением геодинамического, тектонического полей и других.

При разработке теоретической основы метода геометрии недр П.К. Соболевский подчеркивал, что рудное поле подобно векторно-потенциальному полю распределения полезных ископаемых. Исходя из этого, структуру рудного поля можно рассматривать как тектоническое, геодинамическое или геомеханическое поле распределения напряжений и связанного с ним деформацию массива горных пород. На основании этой аналогии в качестве наглядного примера рассмотрим один из вариантов анализа векторного поля.

Векторное поле можно также рассматривать как поле распределения скорости установившегося потока несжимаемой жидкости и выразить его следующими формулами:

$$W_x = p(x,y)$$

$$W_y = g(x,y) \qquad (5)$$

где p и g – компоненты вектора.

Известно, что поток жидкости характеризуется равенством:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{dg}{dy};\ \frac{dp}{dy} = \frac{dg}{dx} \qquad (6)$$

Эти выражения, известные под названием условий Коши и Римана, сводятся к определению значения искомых точек, исходя из заданных значений ряда узловых точек. При этом в задаче Коши узловые точки лежат на одной линии, а в задаче Римана – на двух линиях. Из последнего выражения можно заключить, что p и g являются частными производными некоторой функции, представляющей собой потенциал скоростей потока. Если этот потенциал обозначим через U, то указанные частные производные определяются следующим образом:

$$p = \frac{du}{dx};\ g = \frac{du}{dy} \qquad (7)$$

Откуда определяется компоненты скорости потока по теореме Пифагора в следующем виде:

$$\sqrt{p^2 + g^2} = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \qquad (8)$$

На основании выражений (7) и (8) нетрудно заключить, что компонент потенциала будет равен нулю, т.е.

$$\Delta U = \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d^2U}{dy^2} = 0 \tag{9}$$

Следовательно, кривые имеют постоянное значение и называются линиями потенциального уровня.По методике геометрии недр это нечто иное как изолиния. Изменения осуществляется в перпендикулярном к ним направлении, т.е. по падению плоскости. Если рассмотреть компонент скорости в произвольном направлении, то будем иметь следующее выражение:

$$W_3 = P\frac{dx}{ds} + g\frac{du}{ds}$$

$$W_3 = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} \tag{10}$$

Следовательно, характеристическими функциями потока уравнения траектории будут:

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{g} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}\cdot dx = 0 \tag{11}$$

На основании формул (10) и (11) можно написать

$$du = \frac{du}{dx}\cdot dy - \frac{du}{dy}\cdot dx = 0 \tag{12}$$

Что является дифференциальным уравнением траектории функции потока. V(x,y) откуда, по аналогии с выражением (10) можно заключить, что траектория потока приобретает постоянный характер. Это означает, что кривые потенциалы уровня и кривые траектории теории потока являются ортогональными друг другу. На языке метода геометрии недр это означает: направление градиентов перпендикулярным направлению изолинии, т.е. это заложение.

Потенциал скорости и функция потока, связанные с условиями Коши и Римана (7) представляют собой две сопряженные гармонические функции: U(x,y) и V(x,y). Эти две сопряженные функции можно рассматривать в виде одной функции комплексного переменного

$$z = x + iy, \text{ т.е.}$$

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y) \tag{13}$$

Таким образом, скорость потока в любой точке может быть определена парой сопряженных функций: p(x,y) и g(x,y) или одним комплексным числом p + ig. Эти принципы лежат в основе анализа деформации при помощи введения комплексных величин.

В трещинной тектонике, где системы сопряженных трещин по существу являются результатом распределения скоростей сейсмических волн в пределах рудного поля, применение указанного метода считаем вполне обоснованным. В частности при выводе показательной формы прочности горных пород, применение комплексного метода считается целесообразным. Напомним, что угол внутреннего трения, а так же угол сдвижения получаются как ортогональные проекции одной системы трещин на другую.

Векторный метод является основным средством в современной науке. Многие важные вопросы геомеханики опираются на векторную методику. В геомеханике мы не имеем возможности останавливаться на всевозможных принципах векторного метода. Часто ограничиваются лишь последними результатами. Так, например, мы построим эллипсоид деформации на основе заданной трещиной тектоники [2]. Это весьма важный принципиальный вопрос, связывающий различные стадии деформации массива горных пород, начиная от стадии упругопластической до стадии полной разрывной дислокации.

Литература:

1. Абдылдаев Э.К. Метод конечных элементов при решении прикладных задач. – Алматы.: Полиграфия-сервис, 2011, - 111 с.
2. Абдылдаев Э.К., Машанов А.А., Абдылдаев Э.Э. Модель среды, учитывающая трещиноватость массива и контактные условия. Вестник Казахского национального технического университета им. К.И.Сатпаева, Алматы.-2011.- №4 (86).-С.107 - 110.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Бийбосунов Б.И.