

Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х., Саидов И.М.

**БАЛЫКТЫН ЭКИ ТҮРҮН ӨСТҮРҮҮЧҮ КӨЛМӨНҮН ЭКОСИСТЕМАСЫН
МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДЕШТИРҮҮ**

Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х., Саидов И.М.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМЫ РЫБОВОДНОГО
ПРУДА С ДВУМЯ ВИДАМИ РЫБ**

F.S. Komilov, S.Kh. Mirzoev, I.M. Saidov

**MATHEMATICAL MODELING OF FISHPOND ECOSYSTEM
TWO FISH SPECIES**

УДК: 574.6: 477.63/64

Макалa балыктын эки түрүн өстүрүүгө ыңгайлаштырылган көлмөнүн экосистемасын математикалык моделдештирүүгө арналган. Иштелип чыккан математикалык моделдин негизги максаты балык өстүрүүчү көлмөнүн экосистемасын изилдөөчү инструменти катары анын эволюциясынын мыйзам ченемдиктүүлүгүн өздөштүрүү, өнүгүү динамикасын прогноздоо үчүн эффективдүү компьютердик инструментти иштеп чыгуу жана ошондой эле максималдык балыкты өстүрүүгө жетишүү үчүн функционалдык башкаруу болуп саналат.

Негизги сөздөр: математикалык моделдештирүү, экосистема, балык өстүрүүчү көлмө, агым, зат, биогендик элемент, карп, ак жоон мандай балык.

Статья посвящена математическому моделированию экосистемы рыбоводного пруда, предназначенной для выращивания двух видов рыб. Основной целью разработки математической модели как инструмента исследования экосистемы рыбоводного пруда является изучение закономерностей её эволюции, разработка эффективного компьютерного инструмента для прогнозирования её динамики, а также управление её функционированием для достижения максимальной рыбопродуктивности.

Ключевые слова: математическое моделирование, экосистема, рыбоводный пруд, поток, вещество, биогенный элемент, карп, белый толстолобик.

The article is devoted to the mathematical modeling of fishpond ecosystem, designed for the cultivation of two species of fish. The main purpose of the development of a mathematical model as a research tool fishpond ecosystem, is the study of patterns of its evolution, the development of effective computer tool to predict its dynamics and control of its operation to maximize fish production.

Key words: mathematical modeling, ecosystem, fishpond, stream, substance, biogenic elements, carp, white silver carp.

Введение

Предполагается, что состояние модельной экосистемы рыбоводного пруда, предназначенной для выращивания двух видов рыб, в каждый момент времени определяется концентрациями следующих 9 фазовых переменных: карп (*CR*), белый толстолобик (*TL*), фитопланктон (*PT*), бентос (*BN*), зоопланктон (*ZO*), бактерия (*BK*), растворённый минеральный фосфор (*PW*), растворенный неорганический азот (*NW*) и детрит воды (*DW*).

Входными функциями модельной экосистемы являются два климатических фактора – температура воды (*T*), интенсивность солнечной радиации (*I₀*) и четыре управляющих воздействия, характеризующих внесение искусственного корма (*CO* – комбикорм, *CU* – куколки тутового шелкопряда) и минеральных удобрений (*SU* – суперфосфат, *SE* – аммиачная селитра) [1-5].

Математическая модель сформировалась на основе описательной формы потоков вещества экосистемы рыбоводного пруда и представляет собой систему 9 потоковых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dT_L}{dt} = Q_{PTL} + Q_{BKTL} + Q_{DWT_L} - Q_{TLDW}$$

$$\frac{dCR}{dt} = Q_{BNCR} + Q_{ZOCR} - Q_{CRDW} + [\alpha \cdot CO(t) + \beta \cdot CU(t)] \cdot CR$$

$$\frac{dPT}{dt} = Q_{PWPT} + Q_{NWPT} + Q_{CWPT} - Q_{PTL} - Q_{PTZO} - Q_{PTDW}$$

$$\begin{aligned} \frac{dZO}{dt} &= Q_{PTZO} + Q_{BAZO} - Q_{ZOCR} - Q_{ZODW} \\ \frac{dBK}{dt} &= Q_{PWBK} + Q_{NWBK} + Q_{CWBK} - Q_{BKZO} - Q_{BKBN} - Q_{BKTL} - Q_{BKDW} \\ \frac{dBN}{dt} &= Q_{BKBN} - Q_{BNCR} - Q_{BNDW} \\ \frac{dPW}{dt} &= Q_{DWPW} - Q_{PWPT} - Q_{PWBK} + SU(t) \\ \frac{dNW}{dt} &= Q_{DWNW} - Q_{NWPT} - Q_{NWBK} + SE(t) \\ \frac{dDW}{dt} &= Q_{PTDW} + Q_{ZODW} + Q_{BKDW} + Q_{BNDW} + Q_{TLDW} + Q_{CRDW} - Q_{DWPW} - \\ &\quad - Q_{DSNW} - Q_{DSCW} + (1 - \alpha) \cdot CO(t) + (1 - \beta) \cdot CU(t) - sed \cdot DW \end{aligned}$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:

Q_{ij} – поток вещества из i -го блока к j -ый блок (например, из блока фитопланктона к блоку зоопланктон – Q_{PTZO}), $Q_{ij} = f_j(T) \cdot \xi_j(I_0) \cdot r(i, j) \cdot (1 - \delta_j)$;

$f_j(T)$ – функция лимитирования j -го организма температурой ($0 < f_j(T) \leq 1$), $j = TL, CR, PT, ZO, BK$ или BN ;

T – температура воды;

$\xi_j(I_0)$ – функция лимитирования j -го организма светом ($0 < \xi_j(I_0) \leq 1$), $j = PT$;

I_0 – интенсивность солнечной радиации на поверхности пруда;

$r(i, j)$ – s -образная трофическая функция;

i, j – переменные модели;

δ_j – потери j -го организма на метаболизм (метаболический коэффициент);

α, β – соответственно, доли комбикорма и куколок, идущих на потребление карпа;

sed – коэффициент седиментации детрита.

Соответствующие формулы для каждого потока вещества и другие функциональные зависимости, использованные в математической модели, представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{DWPW} &= f_{DW}(T) \cdot des \cdot \chi_{DW}^{PW} \frac{r(DW, BK)}{\chi_{DW}^{PW} + \chi_{DW}^{NW} + \chi_{DW}^{CW} + \chi_{DW}^{sed}} \\ Q_{DWNW} &= \chi_{DW}^{NW} \cdot Q_{DWPW} \\ Q_{DWCW} &= \chi_{DW}^{CW} \cdot Q_{DWPW} \\ Q_{PWPT} &= f_{PT}(T) \cdot \xi_{PT}(I_0) \cdot Y_{PT}^{PW} \cdot (1 - \delta_{PT}) \\ Q_{NWPT} &= \chi_{PT}^{NW} \cdot Q_{PWPT} \\ Q_{CWPT} &= \chi_{PT}^{CW} \cdot Q_{PWPT} \\ Q_{PWBK} &= f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{PW} \cdot (1 - \delta_{BK}) \\ Q_{NWBK} &= \chi_{BK}^{NW} \cdot Q_{PWBK} \\ Q_{CWBK} &= \chi_{BK}^{CW} \cdot Q_{PWBK} \\ Q_{PTTL} &= f_{TL}(T) \cdot r(PT, TL) \cdot (1 - \delta_{TL}) \\ Q_{BNCR} &= f_{CR}(T) \cdot r(BN, CR) \cdot (1 - \delta_{CR}) \\ Q_{BKTL} &= f_{TL}(T) \cdot \min\{y1, y2\} \cdot (1 - \delta_{TL}) \\ y1 &= r(PT_{cr}, TL) - r(PT, TL) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= r(BK, TL) \cdot \eta(PT) \\
 Q_{ZOCR} &= f_{CR}(T) \cdot \min\{y_3, y_4\} \cdot (1 - \delta_{CR}) \\
 y_3 &= r(BN_{cr}, CR) - r(BN, CR) \\
 y_4 &= r(ZO, CR) \cdot \eta(BN) \\
 Q_{DWTL} &= f_{TL}(T) \cdot \min\{\min\{y_1, y_5\} - \min\{y_1, y_2\}, y_6\} \cdot (1 - \delta_{TL}) \\
 y_5 &= r(BK_{cr}, TL) \cdot \eta(PT) \\
 y_6 &= r(DW, TL) \cdot \eta(PT) \cdot \eta(BK) \\
 Q_{PTZO} &= f_{ZO}(T) \cdot r(PT, ZO) \cdot (1 - \delta_{ZO}) \\
 Q_{BKZO} &= f_{ZO}(T) \cdot r(BK, ZO) \cdot (1 - \delta_{ZO}) \\
 Q_{BKBN} &= f_{BN}(T) \cdot r(BK, BN) \cdot (1 - \delta_{BN}) \\
 Q_{PTDW} &= \delta_{PT} \cdot (Q_{PWPB} + Q_{NWPB} + Q_{CWPB}) / (1 - \delta_{PT}) + \omega_{PT} \cdot PT \\
 Q_{BKDW} &= \delta_{BK} \cdot (Q_{PWBK} + Q_{NWBK} + Q_{CWBK}) / (1 - \delta_{BK}) + \omega_{BK} \cdot BK \\
 Q_{ZODW} &= \delta_{ZO} \cdot (Q_{PTZO} + Q_{BKZO}) / (1 - \delta_{ZO}) + \omega_{ZO} \cdot ZO \\
 Q_{BNDW} &= \delta_{BN} \cdot Q_{BKBN} / (1 - \delta_{BN}) + \omega_{BN} \cdot BN \\
 Q_{TLDW} &= (\delta_{TL} + \hat{\delta}_{TL} \cdot R_{TL} / R_{TL}^{\max}) \cdot R_{TL} / (1 - \delta_{TL}) + \omega_{TL} \cdot TL \\
 Q_{CRDW} &= (\delta_{CR} + \hat{\delta}_{CR} \cdot R_{CR} / R_{CR}^{\max}) \cdot R_{CR} / (1 - \delta_{CR}) + \omega_{CR} \cdot CR \\
 R_{TL} &= Q_{PTTL} + Q_{BKTL} + Q_{DWTL} \\
 R_{CR} &= Q_{BNCR} + Q_{ZOCR} \\
 \eta(i) &= \frac{e^{-\lambda_i \cdot (i - m_i)}}{1 + e^{-\lambda_i \cdot (i - m_i)}}, \quad i = PT, BK \text{ или } BN
 \end{aligned}$$

Переход вещества с одного трофического уровня на другой в модели описывается так называемыми *s*-образными трофическими функциями

$$r(i, j) = \frac{\mu_{ij} \cdot i^s}{K_{ij}^s + i^s} \cdot j, \quad (1)$$

где μ_{ij} - максимальная скорость потребления (*л/сутки*), K_{ij} - коэффициент полунасыщения (*мг/л*). Зависимость роста организмов от температуры $f_j(T)$ описывается модифицированной функцией Лемана

$$f_j(T) = \begin{cases} \exp\left[-1,25 \cdot \left(\frac{T_{opt}^j - T}{T_{opt}^j - T_{min}^j}\right)^2\right], & \text{если } T < T_{opt}^j \\ \exp\left[-1,25 \cdot \left(\frac{T - T_{opt}^j}{T_{max}^j - T_{opt}^j}\right)^2\right], & \text{если } T \geq T_{opt}^j, \end{cases}$$

где T_{opt}^j - оптимальная температура для развития *j*-го организма; T_{min}^j , T_{max}^j - минимальный и максимальный пределы толерантности *j*-го организма по температуре соответственно.

Следуя Стилу, функция, описывающая лимитирование роста фитопланктона светом, задается в следующем виде:

$$\xi_{PT}(I_0) = \frac{I_h}{I_{opt}^{PT}} \cdot \exp\left(1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{PT}}\right),$$

где I_{opt}^{PT} – оптимальная освещённость для фитопланктона, I_h – освещённость на заданной глубине h .

Для вычисления I_h используется эмпирический закон Бэра-Ламберта об экспоненциальном затухании света с увеличением глубины: $I_h = I_0 e^{-\nu h}$, где I_0 – суммарная солнечная радиация на поверхности пруда. Коэффициент затухания (ν) может быть пропорциональным концентрации взвешенных в воде веществ – фитопланктона и детрита: $\nu = kw + kp \cdot PT + kd \cdot cpd \cdot DW$, где kw – коэффициент затухания в чистой воде, kp и kd – коэффициенты затемнения фитопланктоном и детритом, cpd – доля детрита, взвешенная в воде.

Потребление в экосистеме биогенных элементов – углерода, азота и фосфора – синхронизировано в соответствии с законами стехиометрии. Соотношение углерода, азота и фосфора в живых организмах поддерживается примерно постоянным: $CW:NW:PW = \chi_{DW}^{CW} : \chi_{DW}^{NW} : \chi_{DW}^{PW}$, где χ_{DW}^{PW} – стехиометрический коэффициент для фосфора, который в среднем равен 1, χ_{DW}^{NW} – стехиометрический коэффициент для азота, равный величине от 5 до 16, а χ_{DW}^{CW} – стехиометрический коэффициент для углерода приблизительно равен 100.

Чтобы обеспечить такое соотношение CW , NW и PW в биоте, необходимо выдержать потоки потребляемых углеродо-, азото- и фосфоросодержащих веществ в таких же отношениях. Поскольку мы не различаем отдельные виды азото- и фосфоросодержащих веществ, то законы стехиометрии при потреблении биогенов будут описываться проще.

Например, потребление фосфора фитопланктоном будет определяться потоком

$$Y_{PT}^{PW} = \min \left\{ r(PW, PT), \frac{1}{\chi_{PT}^{NW}} \cdot r(NW, PT) \right\}, \quad (2)$$

где $r(PW, PT)$ и $r(NW, PT)$ – s -образные трофические функции вида (1), χ_{PT}^{NW} – стехиометрический коэффициент азота для фитопланктона. Потребление азота будет пропорционально $Y_{PT}^{NW} = \chi_{PT}^{NW} \cdot Y_{PT}^{PW}$.

Для синхронизации потоков азота и фосфора используется следующая процедура:

- вычисление потенциально возможных потоков биогенных веществ по формулам (1);
- определение лимитирующего биогенного вещества по формуле (2);

- пересчет потоков. Потребление нелимитирующего биогена происходит со скоростью, определяемой потреблением лимитирующего биогена.

Поскольку углерод не лимитирует продукционный процесс, но при этом является основной по весу составляющей биомассы, то его потребление учитывается косвенно, считая, что он потребляется в количестве $Y_{PT}^{CW} = \chi_{PT}^{CW} \cdot Y_{PT}^{PW}$. Соответствующая доля χ_{PT}^{CW} выпадает при разложении детрита.

Итак, в соответствии с принципом лимитирующих факторов потребление биогенных элементов фитопланктоном будет определяться потоками

$$Y_{PT}^{PW} + Y_{PT}^{NW} + Y_{PT}^{CW} = (\chi_{PT}^{PW} + \chi_{PT}^{NW} + \chi_{PT}^{CW}) \cdot Y_{PT}^{PW}$$

Потребление биогенных элементов бактериями описывается аналогично, но с другими стехиометрическими коэффициентами:

$$Y_{BK}^{PW} + Y_{BK}^{NW} + Y_{BK}^{CW} = (\chi_{BK}^{PW} + \chi_{BK}^{NW} + \chi_{BK}^{CW}) \cdot Y_{BK}^{PW}$$

Скорость протекания процесса бактериального разложения будет представлена следующей формулой:

$$r(DW, BK) = \frac{\mu_{DWBK} \cdot DW^s}{K_{DWBK}^s + DW^s} \cdot BK,$$

где μ_{DWBK} – максимальная скорость разложения детрита бактериями, K_{DWBK} – соответствующая константа полунасыщения.

На скорость процессов деструкции существенно влияет температура. Для описания температурной зависимости используется формула Вант-Гоффа:

$$f_{DW}(T) = 2^{\frac{(T-T_0)}{10}},$$

отражающая факт увеличения скорости процессов в два раза при увеличении температуры на 10°C . Здесь T_0 – температура, при которой измерены остальные коэффициенты, входящие в описание процесса.

Таким образом, разложение детрита до фосфора определяется формулой:

$$Q_{DWPW} = f_{DW}(T) \cdot des \cdot \frac{\chi_{DW}^{PW}}{\chi_{DW}^{PW} + \chi_{DW}^{NW} + \chi_{DW}^{CW} + \chi_{DW}^{sed}} \cdot r(DW, BK),$$

где des – коэффициент деструкции ($0 < des < 1$); χ_{DW}^{PW} , χ_{DW}^{NW} , χ_{DW}^{CW} – стехиометрические коэффициенты для фосфора, азота и углерода, соответственно, а χ_{DW}^{sed} – доля детрита выходящего из круговорота и захороняемого в седментах. Разложение детрита до азота, соответственно, будет представлено следующей формулой:

$$Q_{DWNW} = \chi_{DW}^{NW} \cdot Q_{DWPW}$$

Выедание организмов при переходе вещества с одного трофического уровня на следующий снова определяется s-образными трофическими функциями и лимитируется температурными функциями.

Смертность живых организмов зависит от наличия растворенного кислорода в воде. В нашей модели предполагается то, что наличие кислорода в воде не лимитирует процессы жизнедеятельности организмов и находится на уровне насыщенности. Поэтому смертность организмов и их переход в детрит задается линейной функцией биомассы или концентрации живых объектов:

$$Q_{iDW} = \omega_i \cdot i,$$

где ω_i – коэффициент смертности i -го организма, $i = PT, ZO, BK$ или BN .

Образующийся при этом детрит состоит из углерода, азота и фосфора, причем лишь азот и фосфор детрита включены в число переменных модели.

Для описания процесса кормления рыб, в модели использовано свойство элективности, т.е. питание с переключением: пусть имеющиеся корма – q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) упорядочены по предпочтению q_1, q_2, \dots, q_n , причем q_1 – концентрация излюбленного корма. Зависимость вероятности потребления объекта i -го типа от суммарной

концентрации объектов питания $q = \sum_{i=1}^n q_i$, где q_i – концентрация i -го вида жертв, обозначим через η_i . Тогда

вероятность $\eta_i = 1$ при любом наборе q_1, q_2, \dots, q_n , а вероятность перехода на менее предпочтительный корм η_i есть функция концентрации q_{i-1} , т.е. $\eta_i(q_{i-1})$, $i = 2, 3, 4, \dots, n$. Кривые $\eta_i(q)$, $i = 2, 3, \dots$ имеют перевернутый s-образный вид (рис. 4).

Так, например, потребление излюбленного корма (фитопланктона – PT) толстолобиком (TL) представляется в виде

$$A_{PTTL} = f_{TL}(T) \cdot r(PT, TL) \cdot (1 - \delta_{TL}).$$

Для описания переключения толстолобика с питания фитопланктоном на питание заменяющего корма в модели используется функция

$$\eta(PT) = \frac{e^{-\lambda_{PT} \cdot (PT - m_{PT})}}{1 + e^{-\lambda_{PT} \cdot (PT - m_{PT})}},$$

где λ_{PT} – параметр, характеризующий крутизну кривой, а m_{PT} – коэффициент полуобеспеченности фитопланктоном, т.е. значение PT , при котором $\eta(PT) = 0,5$.

Тогда потребление бактерий толстолобиком в случае недостатка фитопланктона выразится в следующей формуле:

$$Q_{BKTL} = f_{TL}(T) \cdot \min\{[r(PT_{cr}, TL) - r(PT, TL)], r(BK, TL) \cdot \eta(PT)\} \cdot (1 - \delta_{TL}),$$

где PT_{cr} – критическое значение фитопланктона, при котором толстолобик переходит на питание бактериями. Разность двух трофических функций под знаком минимума обеспечивает ограничение скорости роста рыб так, чтобы она была не выше той, которая достигнута на излюбленном корме (при $PT = PT_{cr}$).

При нехватке бактерий толстолобик переходит на питание вынужденным кормом, т.е. детритом – DW :

$$Q_{DWTL} = f_{TL}(T) \cdot \min\{\min\{[r(PT_{cr}, TL) - r(PT, TL)], r(BK, TL) \cdot \eta(PT)\} - \min\{[r(BK_{cr}, TL) - r(BK, TL)] \cdot \eta(PT), r(DW, TL) \cdot \eta(BK) \cdot \eta(PT)\}\} \cdot (1 - \delta_{TL}).$$

Этот процесс может продолжаться и далее. В этом случае переключение будет двухступенчатым, трехступенчатым и т.д.

Выделение живыми объектами водоема продуктов метаболизма в первом приближении считается пропорциональным суммарному потреблению кормовых объектов. Выделение и переход продуктов метаболизма в детрит в модели представлен следующим образом (на примере толстолобика):

$$Q_{TLDW}^A = (Q_{PTTL} + Q_{BKTL} + Q_{DWTTL}) \frac{\delta_{TL}}{(1 - \delta_{TL})},$$

где δ_{TL} – коэффициент метаболизма толстолобика, Q_{PTTL} , Q_{BKTL} , Q_{DWTTL} – потоки, описывающие потребление фитопланктона, бактерий и детрита толстолобиком.

Кроме того, для рыб учитывается зависимость усвоения пищи от величины рациона. Так, например, при обильном питании толстолобика пища заглатывается непрерывно и проходит через кишечник с такой быстротой, что лишь 30-40% ее усваивается, тогда как при умеренном питании усваивается в 2 раза больше:

$$Q_{TLDW}^B = R_{TL}^2 \frac{\hat{\delta}_{TL}}{R_{TL}^{\max}},$$

где $R_{TL} = Q_{PTTL} + Q_{BKTL} + Q_{DWTTL}$, R_{TL}^{\max} – максимальный рацион для толстолобика, $\hat{\delta}_{TL}$ – суммарный метаболический параметр для толстолобика.

Естественная смертность рыб в условиях оптимального режима в нагульном пруду должна отсутствовать. Но учитывая вероятности паразитических и прочих инфекционных заболеваний рыбных популяций пруда, в модели учтена смертность рыб

$$Q_{IDW}^C = \omega_i \cdot i,$$

где ω_i – коэффициент смертности i -ой рыбы, $i = TL$ или CR .

Таким образом, поток Q_{TLDW} характеризуется так:

$$Q_{TLDW} = Q_{TLDW}^A + Q_{TLDW}^B + Q_{TLDW}^C = (\delta_{TL} + \frac{R_{TL}}{R_{TL}^{\max}}) \cdot R_{TL} / (1 - \delta_{TL}) + \omega_{TL} \cdot TL$$

Литература:

1. Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х., Акобирзода Ф. Учет гидро-климатических и физико-химических характеристик экосистемы рыбоводного пруда при её компьютерном моделировании // Вестник Таджикского национального университета (научный журнал), сер.естеств.наук, 1/1(156). – Душанбе: «Сино», 2015, с.19-27. – ISSN 2074-1847.
2. Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х., Акобирзода Ф., Эргашбоев И. Микробиологические основы компьютерного моделирования экосистемы рыбоводного пруда // Известия Академии наук Республики Таджикистан, отд.биол. и мед. наук, №2 (190). – 2015, с. 54-62. – ISSN 0002-3477.
3. Комилов Ф.С., Косимов И.Л. Концептуальная модель экосистемы пруда с тремя видами рыб // Известия ВУЗов Кыргызстана, 2015, № 7, С. 6-9.
4. Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х., Акобирзода Ф. О технологиях выращивания опытного нагульного рыбоводного пруда // Проблемы науки (научно-методический журнал), № 2 (3). – М., 2016, с. 9-13. – ISSN 2413-2101.
5. Комилов Ф.С., Косимов И.Л. О разработке математической модели экосистемы рыбоводного пруда // Наука, новые технологии и инновации, 2015, № 5, С. 18-22.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Нурув И.Д.