Жусупбаева Г.А., Барганалиева Ж.К., Жусупбаева Н.А.

МИНЕРАЛДЫК СУУ БУЛАКТАРЫНА КАЙРА ИШТЕП ЧЫГУУЧУ ӨНДҮРҮШТҮ ОПТИМАЛДУУ БӨЛҮШТҮРҮҮ МАСЕЛЕСИ

Жусупбаева Г.А., Барганалиева Ж.К., Жусупбаева Н.А.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРИКРЕПЛЕНИЯ ПЕРЕРАБАТЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ ЗА ИСТОЧНИКОМ МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД

G.A. Zhusupbaeva, Zh.K. Barganalieva, N.A. Zhusupbaeva

THE PROBLEM OF OPTIMAL ATTACHMENT PROCESSING PLANTS FOR MINERAL WATERS

УДК: 519.8

Минералдык суу чыккан булактарды кайра иштеп чыгуучу өндүрүштүк компаниясы каралып, аны оптималдуу байланыштыруу маселесине карата математикалык модель түзүлгөн. Минералдык суулардын ар бир түрүнө карата калктын сууга болгон муктаждыгы белгилүү болгон учур үчүн чыгаруу ыкмасы сунушталган. Түзүлгөн математикалык моделдин колдонууга жарактуу экендигин текшерүү үчүн сандык мисал келтирилген жана чыгарылган.

Негизги сөздөр: *минералдык суу, математикалык модель, муктаждык, суунун булагы, өндүрүш, кайра иштеп чыгуу, чыгым.*

Сформулирована математическая модель задачи оптимального прикрепления перерабатывающих предприятий компании за источниками минеральных вод. Предлагается способ решения задачи в случае, когда объем потребности населения на каждый вид минеральной воды предполагается заданным. Для проверки пригодности к эксплуатации сформулированной математической модели приведен и решен числовой пример.

Ключевые слова: *минеральная вода, математическая модель, потребность, источник воды, предприятия, переработка, расход.*

A mathematical model of the optimal attachment of the company's processing plants for mineral water springs. It is assumed way to solve the problem in the case when the volume of the population's needs for each type of mineral water is assumed to be given. To check the roadworthiness formulated mathematical model is given and solved numerical example.

Key words: *mineral water, a mathematical model, the need for a source of water, enterprise, processing, consumption.*

Постановка задачи. В замкнутом регионе имеется компания по переработке минеральной воды состоящая из m источников A_i, $i=1,2,\dots,m$ с объёмами воды ограниченной сверху величиной a_i, т.е $0\leq x_i\leq a_i$, и n предприятий по переработке B_j, $j=1,2,\dots,n$, где производится обработка минеральной воды и приводится к товарному виду, в дальнейшем вода направляется на рынок сбыта.

Следует отметить, что минеральная вода каждого источника A_i, $i=1,2,\dots,m$ различны по химико-биологическому составу и рекомендована употреблять при различных заболеваниях желчных путей, печени и язвенной болезни желудка и других болезней человеческого организма.

Предполагается, что каждое предприятие по переработке B_j, $j=1,2,\dots,n$ имеет возможность обработать и приводит в товарный вид минеральные воды из любого источника A_i , $i=1,2,\dots,m$ в объёме b_{jk}, $j=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,m$ за планируемый период.

Известны потребности населения региона за планируемый период в минеральной воде каждого источника в объёме Q_i, $i=1,2,\dots,m$, матрица закупочно-транспортных затрат на единицы объёма минеральной воды $|c_{ij}|_{m,n}$, и каждого b_j известна матрица $|b_{jk}|_{n,m}$ – максимально-возможный объём перерабатываемой минеральной воды из каждого источника A_i, а также функции определяющие затраты на переработку минеральной воды каждого источника $\varphi_{jk}(y_{jk}) = c_{jk}y_{jk}$, $j=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,m$.

Требуется определить объём перерабатываемой минеральной воды из каждого источника на каждом B_j, $j=1,2,\dots,n$ и план перевозок $x_{ij}\geq 0$ доставляющий минимум суммарных затрат компании. Для формализации задачи введем некоторые обозначения и преобразования. Условимся в дальнейшем, что каждое предприятие по переработке B_j, $j=1,2,\dots,n$ рассмотрим как множество перерабатывающих предприятий B_{jk} с максимальным объемом переработки b_{jk}, $j=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,m$. Тогда каждому предприятию по переработке B_{jk} соответствует некоторый объем перерабатываемой минеральной воды y_{jk}, $0\leq y_{jk} \leq B_{jk}$, $j=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,m$, и x_{ijk} – объем минеральной воды перевозимого из A_i –го источника в предприятие по переработке B_{jk}, $j=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,m$, а также закупочно-транспортные расходы на минеральной воды

$$c_{ijk}=c_{ij}\,\delta_{ik}+M(1-\delta_{ik}),\ j=1,2,\dots,n,\ \ i,k=1,2,\dots,m,(*)$$

где M – достаточно большое положительное число (запрещающий тариф).

Обозначит через G множество пар индексов $\{jk\}$, $k=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, а через G_i множество пар индексов $\{jk\}$, $k=i$, $j=1,2,\dots,n$, где $G=\bigcup_{i=1}^{m} G_i$.

Тогда, математическая модель изложенной проблемы может быть записана в виде следующей экстремальной задачи.

Найти минимум

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{jk\in G} c_{ijk}\,x_{ijk}+\sum_{jk\in G} c_{jk}\,y \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{jk\in G} x_{ijk} = x_i \le a_i,\ i=1,2,\dots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = y_{jk} \le b_{jk},\ jk\in G, \tag{3}$$

$$\sum_{jk\in G_i} x_{ijk} = Q_i,\quad i=1,2,\dots,m, \tag{4}$$

$$x_i \ge 0,\ i=1,2,\dots,m, \tag{5}$$

$$y_{jk}\ge 0,\ x_{ijk}\ge 0,\ jk\in G_i,\ i=1,2,\dots,m, \tag{6}$$

где

$$x=\left|x_{ijk}\right|_{m,|a|},\quad y=\left|y_{jk}\right|_{1,|G|}$$

Предполагается, что выполняется условие

$$Q_i\le \sum_{jk\in G} b_{jk},\ Q_i\le a_i,\ i=1,2,\dots,m \tag{7}$$

Преобразуем задачу (1)-(6) к транспортной. Обращаем систему неравенств (2), (3) в равенство с помощью дополнительных переменных

$x_{(m+i)jk} \ge 0,\ jk\in G_i,\ i=1,2,\dots,m$ и $x_{i(n+i)k} \ge 0,\ i,k=1,2,\dots,m,$

получим $\sum_{jk\in G} b_{jk}-Q_i=\sum_{jk\in G} x_{(m+i)jk},$ $i=1,2,\dots,m,$

$a_i- Q_i=\sum_{i=1}^{m} x_{i(n+i)k},$

где $c_{i(n+i)k}=M(1-\delta_{ik})$ (8)

Теперь условия задачи (1)-(7) с учетом (8) можно записать в виде следующей таблицы 1, где для компактности записи введены следующие обозначения $\bar{c}_{ijk}= c_{ijk}+c_{jk},\quad jk\in G,\quad i=1,2,\dots,m,$

$$a_{m+i}\le \sum_{jk\in G} b_{jk} - Q_i,\ i=1,2,\dots,m,\ b_{(n+i)k}= a_i - Q_i,\ k,i=1,2,\dots,m$$

Далее, задачу (1)-(8) решим модифицированным распределительным методом с использованием способа в [1]. В результате получим план закупки, перевозки и обработки минеральных вод минимизирующих суммарных затрат компании.

Для демонстрации способа решения задачи приведем небольшой пример тремя источниками минеральной воды $(m=3)$.

$A_i,\ i=1,2,3$ и тремя предприятиями по переработке воды $B_j,\ j=1,2,3\ (m=3)$.

Пример:

Имеется три источника $A_i,\ i=1,2,3$ с различным химико-биологическим составом, с максимальными потребителями набираемой воды потребителей $B_i,\ i=1,2,3$ в объеме $a=\{a_1,a_2,a_3\}=\{110,150,120\}$ Тысячи тонн за планируемый период, т.е.

$0 \le x_1 \le 110,0 \le x_2\le 150,\ 0 \le x_3 \le 120.$

Известно:

- для каждого $B_j,\ j=1,2,3$ объем перерабатываемой воды из каждого источника $A_i,\ i=1,2,3$ за планируемый период

$0\le y_{jk} \le B_{jk},\quad j=1,2,3,\qquad k=1,2,3,$ т.е.

$0 \le y_{11} \le 200,\quad 0 \le y_{12} \le 150,\quad 0 \le y_{13} \le 170,$

$0 \le y_{21} \le 150,\quad 0 \le y_{22} \le 120,\quad 0 \le y_{23} \le 150,$

$0 \le y_{31} \le 250,\quad 0 \le y_{32} \le 140,\quad 0 \le y_{33} \le 200;$

- затраты на переработку единицы объема минеральной воды из каждого источника $A_i,\ i=1,2,3$ в $B_j,\ j=1,2,3,\dots,n$ задана в виде матрицы

$$|c_{jk}|_{3,3} = \begin{vmatrix}1000 & 1000 & 1000\\ 1000 & 1000 & 1000\\ 1000 & 1000 & 1000\end{vmatrix};$$

- закупочно-транспортные затраты на единицы объема минеральной воды

$$|C_{ij}|_{3,3}=\begin{vmatrix}660 & 120 & 60\\ 400 & 15 & 30\\ 17 & 420 & 460\end{vmatrix};$$

- обьем потребности населения региона за планируемый период на каждый вид воды:

$Q_1=100,\ Q_2=120,\ Q_3=110.$

Требуется определить обьем перерабатываемой минеральной воды из каждого источника $A_i,\ i=1,2,3$ каждым предприятием переработки $B_j,\ j=1,2,3$ и схему перевозок $x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3$ позволяющий минимизировать суммарные затраты компании на закупочно-транспортные затраты и затраты на переработку.

Согласно выше изложенному способу, каждое предприятие $B_j,\ j=1,2,3$ рассмотрим как множество предприятий B_{jk} с максимальным объемом переработки $b_{jk},\ j=1,2,3,\ k=1,2,3$ и обозначим через x_{ijk} - обьем минеральной воды перевозимой из *i-го* источника к и *jk-му* предприятию. Далее, вычислим закупочно-транспортные затраты

$\bar{c}_{ijk},\ i=1,2,3,\quad jk\in G_i$

Согласно (*), получим $\bar{c}_{111}=1660,0;\ \bar{c}_{121}=1120,0;\ \bar{c}_{131}=1060,0;$

$\bar{c}_{212}=1400,0;\quad \bar{c}_{222}=1015,0;\quad \bar{c}_{232}=1030,0;$

$\bar{c}_{313}=1017,0;\ \bar{c}_{323}=1420,0;\ \bar{c}_{333}=1460,0$ и

$\bar{c}_{112}=\bar{c}_{113}=\bar{c}_{122}=\bar{c}_{123}=\bar{c}_{132}=\bar{c}_{133}=\bar{c}_{211}=\bar{c}_{213}=\bar{c}_{221}=\bar{c}_{223}=\bar{c}_{231}=\bar{c}_{233}=\bar{c}_{311}=\bar{c}_{312}=\bar{c}_{321}=\bar{c}_{322}=\bar{c}_{331}=\bar{c}_{332}=M$

Запишем числовую модель задачи.

Найти минимум

$L(x)=1660x_{111}+1120x_{121}+1060x_{131}+1400x_{212}+1015x_{222}+1030x_{232}+1017x_{313}+1420x_{323}+1460x_{333}$ (9)

при условиях

$\sum_{jk\epsilon G} x_{1jk} = x_1 \leq 100$, $\sum_{jk\in G} x_{2jk}=x_2\leq 150$, $\sum_{jk\in G} x_{3jk}=x_3\leq 120$ (10)

$\sum_{i=1}^{3} x_{i11}=y_{11}\leq 200$ $\sum_{i=1}^{3} x_{i12}=y_{12}\leq 150$ $\sum_{i=1}^{3} x_{i13}=y_{13}\leq 170$

$\sum_{i=1}^{3} x_{i21}=y_{21}\leq 150$ $\sum_{i=1}^{3} x_{i22}=y_{22}\leq 120$ $\sum_{i=1}^{3} x_{i23}=y_{23}\leq 150$

$\sum_{i=1}^{3} x_{i31}=y_{31}\leq 250$ $\sum_{i=1}^{3} x_{i32}=y_{32}\leq 140$ $\sum_{i=1}^{3} x_{i33}=y_{33}\leq 200$ (11)

$$\sum_{jk\in G_1} x_{1jk} = 100, \sum_{jk\in G_2} x_{2jk} = 120, \quad \sum_{jk\in G_3} x_{3jk} = 110, \qquad (12)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad jk \in G_i, \quad i = 1,2,3 \qquad (13)$$

Используя теорию запрещающих тарифов и согласно вышеизложенному способу задачу (9)-(13) запишем в виде таблицы 2

Таблица 2

	600	150	170	150	120	150	250	140	200	10	30	10
110	1660	M	M	1120	M	M	1060	M	M	0	M	M
150	M	1400	M	M	1015	M	M	1030	M	M	0	M
120	M	M	1017	M	M	1420	M	M	1460	M	0	M
500	0	M	M	0	M	M	0	M	M	M	M	M
290	M	0	M	M	0	M	M	0	M	M	M	M
410	M	M	0	M	M	0	M	M	0	M	M	M

Решив задачу способом в [1,2], определим оптимальный план объема закупки минеральной воды из каждого источника и смеха перевозок каждого перерабатывающего предприятия $b_j, \; j = 1,2,3,$ т.е.

$$x^* = \{x_{131} = 100{,}0; \quad x_{222} = 120{,}0; \quad x_{313} = 110{,}0\},$$

L(x)=339670,0 условных единиц.

Из оптимального решения следует вывод, что предприятие B_1 закупает из источника A_3 в объеме 110 тыс. тонн минеральной воды для переработки, тем самым выполняет запрос населения региона Q_3 =110 тыс. тонн, предприятия B_2 перерабатывает минеральную воду из A_2 в объеме 120 тыс. тонн и предоставляет на рынок сбыта региона, а предприятие B_3 проводит обработку минеральный воды из первого источника в объеме Q_1 = 100 тыс. тонн предоставляет населению региона. При таком плане работы по обработке минеральный воды расход компании составляет L(x)=339670,0 тыс. сомов.

Литература:

1. Эшенкулов П., Жусупбаев А., Кулитаев Т.Ч. Методика решения задач линейного программирования на компьютере. - Ош, 2004. - С. 61.
2. Ланге Э.Г., Жусупбаев А. Комбинаторный метод решение задачи размещения. - Ф.: Илим, 1990. - С. 153.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.