Салыков С.С., Назарбаева М.Т., Кооманова Ж.К.

МАТЕМАТИКАЛЫК ЛОГИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИН МЕКТЕП МАТЕМАТИКАСЫН ОКУТУУДА КОЛДОНУУ МАСЕЛЕЛЕРИ

Салыков С.С., Назарбаева М.Т., Кооманова Ж.К.

ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

S.S. Salykov, M.T. Nazarbaeva, Zh.K. Koomanova

QUESTIONS OF USING ELEMENTS OF MATHEMATICAL LOGIC IN THE STUDY OF SCHOOL MATHEMATICS COURSE

УДК: 371.31:51

Макала математикалык логиканын символдорун жана айрым закон ченемдүүлүктөрүн пайдалануу менен мектеп математикасынын негизги мазмундук элементтерин окутуунун сапатын жакшыртуунун жолдорун жана каражаттарын талдоого жана негиздүү сунуштарды келтирүүгө арналган.

Негизги сөздөр: *импликация, төгүндөө, конъюнкция, дизъюнкция, түшүнүктүн аныктамасы, теорема, далилдөө, логикалык закондор.*

В статье рассмотрены на основе применения символов и некоторых закономерностей математической логики, пути и средства качественного обучения учащихся основным содержанным элементам школьного курса математики.

Ключевые слова: *импликация, отрицания, конъюнкция, дизъюнкция, определение понятий, теорема, доказательства, логические законы.*

On the basis of symbols and some mathematical regularities logistics the article considers ways and means of students' qualitative teaching to the basic elements of school mathematics course.

Key words: *the implication, negation, conjunction of, disjunction, definitions, theorems, proofs, logical laws.*

Математикалык логика, учурда бир катар бөлүмдөрдөрү жана илимий багыттары бар, дүркүрөп өсүп-өнүгүп жаткан илимдин бири. Матлогиканын элементтерин мектеп математикасынын мазмунуна кийирүү жана анын символикалык аппаратын колдонуу маселелери, өткөн кылымдын 50-жылдарынан бери эл аралык, (Эдинбург 1958) жана мурдагы союздук деңгээлде коюлуп 1968-жылы кабыл алынган программага ылайык, 4-5-класстардан баштап эле "өзгөрмөсү бар сүйлөм", "айтылыштын формасы" сыяктуу логикалык түшүнүктөрдү жана кээ бир логикалык операцияларды киргизүү ишке ашырыла баштаган. Бирок 80-жылдардагы, кийинки реформага ылайык, матлогиканын түшүнүктөрүн орто мектептин математикасынан дээрлик алып салуу ишке ашырылганын өкүнүү менен белгилөөгө туура келет.

Биз өзүбүздүн чакан макалабызда, билим берүүчүлүк жана эң башкысы – өсүп-өнүктүрүүчүлүк чоң мааниге ээ болгон, жана мектеп математикасынын мазмунунун негизги элементтерине логикалык талдоо жүргүзүүдө эң зарыл боло турган, матлогиканын маалыматтарын кыскача берүүнүн жолдоруна, ошону менен бирге окуучулардын логикалык маданиятына сереп салуу аркылуу, аны жакшыртууга алып келүүчү айрым сунуштарга токтолмокчубуз.

Математикалык логика предметин педагогикалык ЖОЖдордо узак убакыт бою окутуу тажрыйбасына таянып, анын төгүндөө, конъюнкция, дизъюнкция, импликация жана эквиваленция операцияларынын таблицалык аныктамасын (логикалык эки өзгөрмө үчүн) келтирели [3, 13] [5, 14].

x	y	$\bar{x}$	X&y	x∨y	x→y	x⇔y
Ч	Ч	К	Ч	Ч	Ч	Ч
Ч	К	К	К	Ч	К	К
К	Ч	Ч	К	Ч	Ч	К
К	К	Ч	К	К	Ч	Ч

(Мында "Ч", "К" тамгалары логикалык өзгөрмөлөрдүн чындык маанилерин билдирет.) Конъюнкция жана дизънкция операциялары коммутативдик, ассоциативдик жана бири-бирине карата дистрибутивдик касиеттерге ээ болушса, жалпы эле, логикалык операциялардын арасындагы терең байланыш орун алып, алардын мазмуну төмөнкүдөй логикалык теңдештиктер аркылуу ачылып берилет:

$$\overline{x \,\&\, y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}, \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \,\&\, \bar{y},$$

$$x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x \,\&\, \bar{\bar{y}}}, x \leftrightarrow y = (x \to y)\,\&\,(y \to x) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y)\,\&\,(\bar{y} \vee x) \equiv \overline{x \,\&\, \bar{\bar{y}}} \,\&\, \overline{y \,\&\, \bar{\bar{x}}}$$

Матлогиканы окуп-үйрөнүүдөгү негизги максат – логикалык закондордун маңызын жана аларды колдонуу жолдорун өздөштүрүү. Математикалык негизги сүйлөмдөрдү (аксиомаларды, түшүнүктүн аныктамасын, теорамаларды жана алардын далилдөөлөрүн) окуп үйрөнүүдө айрыкча төмөнкү логикалык закондор маанилүү болмокчу:

$$x \to y \equiv \bar{y} \to \bar{x}, (x \to y)\,\&\,(y \to z) \Rightarrow (x \to z)$$

(Алардын биринчисинин негиздөөсүн келтирели: $x \to y \equiv \bar{x} \vee y \equiv y \vee \bar{x} \equiv \bar{\bar{y}} \vee \bar{x} \equiv \bar{y} \to \bar{x};$)

Келтирилген бул эки логикалык формула контрпозиция жана силлогизм закондору деп аталса, алардан тышкары карама-каршылык, үчүнчү мүмкүнчүлүктү төгүнгө чыгаруу закондору, ошондой эле конъюнкцияны, дизъюнкцияны, импликацияны кийирүү (алып салуу) закондору да, маселен, теоремалардын далилдөөсүн анализдөөдө чоң мааниге ээ.

Бул маалыматтар менен бирге эле $(\forall x)P(x)$ жана $(\exists x)P(x)$ түрүндө жазылып, "Ар кандай х Р касиетине ээ болот, жана Р касиетине ээ боло турган х жашайт" деп окула турган кванторлук операциялардын төмөнкүдөй негизги касиеттерин эске алуу да ашыктык кылбайт [5, 45].

$$\overline{(\exists x)P(x)} \equiv (\forall x)\overline{P(x)}, \overline{(\forall x)P(x)} \equiv$$

$$\equiv (\exists x)\overline{P(x)}, (\forall x)(\exists y)Q(x,y) \neq (\exists y)(\forall x)Q(x,y)$$

Мектеп практикасы көрсөткөндөй окуучулар жогоруда көрсөтүлгөн логикалык касиеттерди колдонууда көп мүчүлүштүктөргө жол беришет. (Окуучулардын каталары алардын себептерин жана оңдоо жолдорун логикалык жактан негиздөө маселелери өзүнчө чоң макалада талдоого алууга татыктуу) [2, 82-83].

Эми мектеп математикасында матлогиканы колдонуу маселелерине өтөлү. 7-класстын геометрия курсунда төмөнкүдөй аксиома сунушталат: аксиомалардын бирин төмөндөгүчө материалдаштырууга болот.

$$(\forall A, B)(A \neq B \Rightarrow \exists! a \mid A \in a \,\&\, B \in a)$$

(Окулушу: "Ар түрдүү эки чекит аркылуу түз сызык жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана"). Бул сыяктуу аксиомаларды өздөштүрүүдө окуучулар, көп учурда, аксиома эки бөлүктөн, 1-де түз сызыктын жашай тургандыгы, 2-де анын жалгыз экендиги айтылып жатканына анча маани беришпестен, импликациянын шартын толук эске алышпайт. Натыйжада аксиомаларды өздөштүрүү толук кандуу түрдө ишке ашпай калат. Ал эми аксиомалар, кийин сунуштала турган, теоремаларды далилдөөнүн негизги таянычы экендиги белгилүү.

Мектеп математикасынын негизги объектилеринин бири – илимий түшүнүк, анын аныктамасы экендиги белгилүү. Анализдөө көрсөткөндөй, окуучуларга сунуштала турган аныктамалардын дээрлик бардыгында, бир же бир нече логикалык операциялар колдонулат. Мисалы, мезгилдүү функциянын аныктамасында кванторлук жана алгачкы логикалык операциялар кеңири пайдаланылат:

$(\forall f(x)(D(f) = J)(f -$ мезгилдүү функция болот) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in D(f)(\exists T>0)[(x+T) \in D(f) \& (x - T) \in D(f)] \& [(f(x \pm T) = f(x)]$ [1, 33-34]

10- класстын окуучулары тарабынан мезгилдүү функциянын аныктамасынын логикалык структурасын толук кандуу өздөштүрүүсүнө жетишүү үчүн контрмисал ыкмасын колдонуп, фронталдык түрдө, класска, төмөнкүдөй көнүгүүлөрдү аткарууну сунуштайбыз.

1.у = a^x ($x \in R$, $a>0$, $a \neq 1$) – көрсөткүчтүү функциясы үчүн ($\forall x \in$ Д(f) $(x \pm T) \in$ Д(f) шарты аткарылабы? (Жооп, $x \in R$ болгондуктан $(x \pm T) \in$ Д(f) аткарылат)

2.у = a^x функциясы үчүн $f(x \pm T) = f(x)$ шартын текшерип, тиешелүү корутунду жасагыла.

(Окуучулар $a^{x+T} = a^x\, a^T \neq a^x$, $a^{x-T} = \frac{a^x}{a^T} \neq a^x$ экенин текшеришип, туура жоопту табышат).

Мезгилдүү функциянын аныктамасына таянуу менен функциянын мезгилге ээ болбой турган учурдагы жетиштүү шарттарын логикалык негизги закон ченемдүүлүктөргө таянуу менен алуу жолун толук көрсөтүп коюу 10 – класстын окуучуларына жеткиликтүү жана ашыктык кылбайт.

(y = f(x) функциясы мезгилге ээ болбойт) $\Leftrightarrow$

$$\overline{[(\forall x \in Д(f)(x \pm T) \in Д(f)] \& [\exists (T > 0)((\forall x \in Д(f)\, f(x \pm T) = f(x)]}$$

$\equiv [(\exists x \in$ Д(f)$(\forall T>0)(x+T) \notin$ Д(f) $\vee (x - T) \notin$ Д(f)$] \vee (f(x+T) \neq f(x) \vee f(x-T) \neq f(x)]$

Маселен, логарифмалык функция учурунда төгүндөөдөн кийин алынган биринчи логикалык туюнтма, ал эми у = a^x үчүн төгүндөөдөн алынган экинчи мүчө орун алгандыктан, натыйжада ал мезгилдүү функция боло албайт.

Матлогиканын аппараты мектеп математикасынын теоремаларын окутууда да көмүскө түрдө кеңири колдонулат. Кеп, ошол көмүскөнү ачыкка чыгаруунун жолун, каражаттарын издөөдө турат. Ар бир теореманы шарттуу түрдө $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$(1) формуласы менен, анын түшүндүрүүчү бөлүгүн, шартын жана корутундусун ачык көрүнүп тургандай абалда берүүгө болот.

Мисалы, $(\forall n \in N)(n \vdots 2 \,\&\, n \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 6)$ сүйлөмү 6га бөлүнүүчүлүктүн белгиси болуп, түшүндүрүүчү бөлүгүндө сөз ар кандай натуралдык сан жөнүндө бара жатканын билдирсе шарты $n \vdots 2$, $n \vdots 3$ деген сүйлөмдөрдүн конъюнкциясы, ал эми корутундусу болсо $n \vdots 6$ деген сүйлөмдөрдөн турат.

Теоремаларды далилдөөнүн негизги инструменттеринин бири корутунду жасоо ыкмасы болуп эсептелет. Корутунду жасоо дедуктивдик жана индуктивдик түрдө болушу мүмкүн. Биринчи учурда ой- жүгүртүү жалпыдан жекеге карай, индукция учурунда болсо- жекеден жалпыга карай жүргүзүлөт. Мектеп математикасында кеңири колдонулуучу бир катар логикалык корутунду жасоо эрежелерин кыскача карап өтөлү. (Аларды тиешелүү символдорду колдонуу менен жазуу формасы логикадан белгилүү). Бул эрежелер төмөнкүлөр: [5, 51]

1. $\frac{x, y}{x \,\&\, y}$ - конъюнкцияны кийирүү эрежеси (ККЭ);

2. $\frac{x \,\&\, y}{x}, \frac{x \,\&\, y}{y}$ - конъюнкцияны алып салуу эрежелери (КАСЭ)

3. $\frac{x \Rightarrow y, x}{y}$ - корутунду жасоо эрежеси (КЖЭ);

4. $\dfrac{x \Rightarrow y, y \Rightarrow z}{x \Rightarrow z}$ - силлогизм эрежеси (СЭ).

Дагы ушу сыяктуу эрежелер бар.

Чыгаруунун бул эрежелеринин орун ала турганы логикада далилденет. Мисал катарында, акыркы, силлогизм эрежесинин далилдөөсүн келтирели. Карама-каршысынан далилдейбиз. Мейли бул эреже орун албасын, б.а өзгөрмөлөрдүн маанилеринин кандайдыр бир системасында шарты чын, корутундусу калп б.а. x⇒ y ⇔ чын (1),y⇒z ≡ чын (2), бирок x ⇒z ⇔ калп (3) болсун. (3) дөн x ≡ чын (4), z ⇔ калп (5) экендиги, импликациянын аныктамасы боюнча, келип чыгат. (2) жана (5) ден y ⇔ калп (6) экендиги, ал эми (1) менен (6) дан x ⇔ калп (7) экендиги келип чыгат. Биз (4) жана (7) карама-каршылыкты алдык. Демек, силлогизм эрежеси орун алат. Мисал катарында төмөнкү теореманын толук стандарттык формада далилденишин беребиз. [4, 112-113]

Теорема. Өз ара барабар болбогон, оң эки сандын арифметикалык орто саны алардын орто геометриялыгынан чоң.

Бул теореманын шартын төмөндөгүдөй, импликация түрүндө жазууга мүмкүн:

$$[\left(\forall a, в \in R_+\right)((a \succ 0) \,\&\, (в \succ 0) \,\&\, \left(a \neq в\right)) \Rightarrow \frac{a+в}{2} \succ \sqrt{aв}]$$

Далилдөө.

1. $((a \succ 0) \,\&\, (в \succ 0) \,\&\, \left(a \neq в\right))$ (шарт боюнча)

2. a≠в (1-ден 2 эреже КАСЭ боюнча)

3. $(a \neq в) \Rightarrow ((a-в)^2 \succ 0)$ (мурда далилденген теорема)

4.

$$((à-â)^2 \succ 0) \Rightarrow ((à-â)^2 + 4àâ \succ 4àâ)(ì .ä.ò .)$$

$$æå \quad ((à-â)^2 \succ 0) \Rightarrow ((à+â)^2 \succ 4àâ)$$

5. $(a \neq в) \Rightarrow ((a+в)^2 \succ 4aв)$ (3 жана 4 төн СЭ боюнча)

6. $(a+в)^2 \succ 4aв$ (2 жана 5 ден КЖЭ боюнча)

7. $(a \succ 0) \,\&\, (в \succ 0)$ (1 ден КАСЭ боюнча)

8. $(a+в)^2 \succ 4aв \,\&\, (a \succ 0) \,\&\, (в \succ 0)$ (6,7 ден ККЭ боюнча)

9. $(a+в)^2 \succ 4aв \,\&\, (a \succ 0) \,\&\, (в \succ 0) \Rightarrow \dfrac{a+в}{2} \succ \sqrt{aв}$ (м.д.т)

10. $\dfrac{a+в}{2} \succ \sqrt{aв}$ (8,9 КЖЭ боюнча)

11. $((a \succ 0) \,\&\, (в \succ 0) \,\&\, \left(a \neq в\right)) \Rightarrow \dfrac{a+в}{2} \succ \sqrt{aв}$ (1,10 дан ИКЭ боюнча)

Албетте бул теореманын кадимки далилдөөсү, (башка теоремалардын далилдөөсү сыяктуу эле) айрым бир кадамдар ачык көрсөтүлбөгөндүктөн (аларды оoз эки аткарышыбыз мүмкүн) бир топ кыска өңдөнүп көрүнөт. Бул учурда чыгаруу эрежелери адатынча такталбаган, көрсөтүлбөгөн, көмүскө бойдон калат. Экинчи жактан, жогорку теоремада келтирилген, эки шартты канагаттандыруучу сүйлөмдөрдүн чектүү удаалаштыгы катарында далилдөөнүн стандарттуу түрдө берилиши, практикада, дайыма эле колдонула бербейт. Бирок, бул сыяктуу толук түрдө далилдеп алуу мугалим үчүн өтө пайдалуу. Бул схема боюнча жүргүзүлгөн далилдөөнү анализдөө оңой, ошондой эле окуучулар кездешүүчү кыйынчылыктарды, алар тарабынан кетириле турган каталарды алдын ала көрө билүүгө, демек тиешелүү иш чараларды белгилөөгө мүмкүнчүлүк пайда болот.

Жыйынтыктап айтканда, математикалык логиканын элементтерин мектеп математикасынын түшүнүктөрүнүн мазмунун жана көлөмүн тактоодо, аксиомалардын формулировкасынын структурасын ачып көрсөтүүдө, ошондой эле теоремалардын далилдөөлөрүнүн өзгөчөлүктөрүнө жана методдоруна талдоо жүргүзүүдө кеңири пайдалануу менен мугалимге окутуунун каражаттарын колдонуунун эффективдүү жолдорун тандап алууга мүмкүнчүлүк пайда болот. Ал эми окуучулар үчүн логиканын мазмунун белгилегенден кеңири өлчөмдө тандап алуу маселеси өзүнчө (бир нече чакан макалаларда) каралууга татыктуу болгон методикалык проблемалардын катарын толуктайт.

Адабияттар:

1. Алгебра и начала математического анализа: учеб.для А45 10-11кл. общеобразоват. учереждений / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2008.
2. Бекбоев И.Б. Ориентация – на личность: Пути совершенствования обучения и воспитания школьников. – Б., 2000.
3. Математическая логика: учебное пособия для студентов мматематических специальностей педагогических институтов /Л.А. Латотин, Ю.М., А.А. Столяр - Мн.: “Вышэйшая школа” 1991.
4. Столяр А.А. Педагогика математики. Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов пед. институтов – Мн.: “Высшая школа” 1986.
5. Салыков С.С. Матлогиканын элементтери жана аны мектеп математикасын окутууда колдонуу./ К.Тыныстанов атын. Ысык-Көл мамл. ун-ти. – Каракол: 2011.

Рецензент: к.пед.н., доцент Чыныбаев Р.