ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCE

Байманкулов А.Т., Адамов А.А., Жуаспаев Т.А.

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБОБЩЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

A.T. Baimankulov, A.A. Adamov, T.A. Zhuaspaev

THE CONVERGENCE OF THE ITERATIVE PROCESS OF A GENERALIZED COEFFICIENT IDENTIFICATION

УДК: 519.6 (075.8)

Изучается теплообмен в ненасыщенном грунте. Задаются температура грунта и воздуха на поверхности земли. Доказывается сходимость итерационного процесса к решению дифференциальной задачи.

Ключевые слова: *сходимость итерационного процесса, ограниченность решения, минимизируемый функционал, дифференциальная задача.*

The heat exchange in a saturated ground is studied. Temperature of Soil and air on the ground surface are given. The iterative process convergence to the differential problem solution is proved.

Key words: *convergence of the iterative process, the boundedness of solutions, maximum principle for functional differential problem.*

Чтобы минимизировать функционал [1]

$$J(N)=\int_0^{t_{\max}}(\theta(\mathrm{H},t)-T_g(t))^2\,dt \qquad (1)$$

положим, что

$$\Delta N=\beta(n)\Big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\Big)\cdot\psi(H,z)\,.$$

Тогда приращение функционала записывается в виде

$$J\big(N(n+1)\big)-J\big(N(n)\big)-\beta(n)\int_0^{t_{\max}}\Big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\Big)^2\psi^2(H,t)dt-$$

$$-\beta(n)\int_0^{t_{\max}}\Big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\Big)\cdot\psi^2(H,t)\Delta\theta(H,t)dt\,. \qquad (2)$$

В работе [1] приводилось, что для расчета обобщенного коэффициента теплоотдачи принимается итерационная формула

$$N(t;n+1)=N(t;n)+\beta(n)\Big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\Big)\cdot\psi(H,t) \qquad (3)$$

При этом ранее указывались возможные варианты значений обобщенного коэффициента $N(t)$.

В нашем случае будем считать, что обобщенный коэффициент $N(t)=N=const$. В этом случае выражение (3) примет вид

$$N(n+1)=N(n)+\beta(n)\int_0^{T_{\max}}(\theta(H,t;n)-T_g(t))\psi(H,t)dt$$

и равенство (2) записывается в виде

$$J\big(N(n+1)\big)-J\big(N(n)\big)=-\beta(n)\left(\int_0^{t_{\max}}\Big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\Big)\psi(H,t)dt\right)^2-$$

$$-\beta(n)\int_0^{t_{\max}}\left(\theta(H,t;n)-T_g(t)\right)\psi(H,t)dt\cdot\int_0^{t_{\max}}\psi(H,t)\Delta\theta(H,t)dt\,.$$

Рассмотрим, когда $N(t)=N=const$. В этом случае исходная дифференциальная задача записывается в виде

$$C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right),\tag{4}$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(z),\qquad \theta\big|_{t=0}=T_1,\tag{5}$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+N\theta\big|_{z=H}=NT_b(\mathrm{t})\tag{6}$$

А сопряженная дифференциальная задача имеет вид

$$C\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0,\qquad \psi\big|_{t=T_{\max}}=0\tag{7}$$

$$\psi\big|_{z=0}=0,\ \left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}+N\psi\right)\bigg|_{z=H}=2\big(\theta-T_g(t)\big)\big|_{z=H}\tag{8}$$

Напомним, что $T_g(t)$ – измеренная температура почвы на поверхности земли. Вариация функционала имеет вид

$$J\big(N(n+1)\big)-J\big(N(n)\big)=-\beta(n)\left(\int_0^{t_{\max}}\big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\big)\psi(H,t)dt\right)^2-$$

$$-\beta(n)\int_0^{t_{\max}}\big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\big)\psi(H,t)dt\int_0^{t_{\max}}\psi(H,t)\Delta\theta(H,t)dt\tag{9}$$

При этом следующее значение коэффициента обобщенной теплоотдачи определяется по формуле

$$N(n+1)=N(n)-\beta(n)\int_0^{t_{\max}}\big(\theta(H,t;n)-T_g(t)\big)\psi(H,t)dt\tag{10}$$

Теперь докажем, что решение итерационной задачи (4)-(6) сходится к решению исходной дифференциальной задачи при $n\to\infty$. Для этого составляется разность $\Delta\theta=\theta(z,t)-\theta(z,t;n)$, и система (4)-(6) записывается относительно переменной $\Delta\theta$. То есть

$$C\frac{\partial\Delta\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\Delta\theta}{\partial z}\right),\tag{11}$$

$$\Delta\theta\big|_{t=0}=0,\ \ \Delta\theta\big|_{z=0}=0,\tag{12}$$

$$\lambda\frac{\partial\Delta\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+N\Delta\theta\big|_{z=H}=\Delta N\big(\theta-T_в(t)\big)\big|_{z=H}\,.$$

Напомним, что $N=\lim\limits_{n\to\infty}N(n)$, $\Delta N=N-N(n)$. Из системы (11)-(12) стандартным образом получается оценка

$$\frac{1}{2}C\left\|\Delta\theta\right\|^2+\int_0^{\mathrm{t}}\left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\Delta\theta}{\partial z}\right\|^2d\tau+N\int_0^t\big(\Delta\theta(H,\tau)\big)^2d\tau=$$

$$=\Delta N\int_0^t\big(\theta(H,\tau;n)-T_в(t)\big)\Delta\theta(H,\tau)d\tau\,.\tag{13}$$

На основе леммы 1

Ряд $\sum_n \frac{1}{n^{1+\mu}}$ сходится. Поэтому существуют $N_{\min}$ и $N_{\max}$ зависящие от начальных данных такие, что

$$0 < N_{\min} \le N(n) \le N_{\max} < \infty . \tag{14}$$

Лемма 1. Если $\beta(n) = \frac{\beta}{n^{1+\mu}}\left(\frac{N(n)}{1+N(n)}\right)^3, \ \mu > 0$, то

а) из итерационной формулы (10) следует ограниченность приближенного значения коэффициента обобщенной теплоотдачи $N(n+1)$, т.е. имеет место неравенство (14);

б) имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} N(n) = N.$.

заключаем, что

$0 < N_{\min} \le N \le N_{\max} < \infty$.

Поэтому из (13) применяя неравенство Коши выводим

$$\frac{1}{2}C\|\Delta\theta\|^2 + \int_0^t \left\|\sqrt{\lambda}\,\frac{\partial \Delta\theta}{\partial z}\right\|^2 d\tau + \frac{N}{2}\int_0^t \left(\Delta\theta(H,\tau)\right)^2 d\tau \le (\Delta N)^2 \cdot C_9 \int_0^t \left(\theta(H,\tau;n) - T_b(t)\right)^2 d\tau .$$

Но $\lim_{n\to\infty} \Delta N(n) = 0$, то есть $\Delta N = \varepsilon(n)$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$, а

$\int_0^t \left(\theta(H,\tau;n) - T_b(t)\right)^2 d\tau$ ограничено

В силу леммы 2. Поэтому имеет место утверждение.

Лемма 4. Если имеют место леммы 1 и 2, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|\theta(z,t) - \theta(z,t;n)\|^2 + \lambda\int_0^t \left\|\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial\theta(z,t)n}{\partial z}\right\|^2 d\tau \right) +$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \left(\theta(H,\tau) - \theta(H,\tau;n)\right)^2 d\tau = 0 .$$

То есть решение итерационной задачи, сходится к решению исходной дифференциальной задачи.

Литература:

1. Жуаспаев, Т.А., Байманкулов, А.Т. Итерационная формула расчета обобщенного коэффициента теплообмена, Бишкек, звестия Вузов, №3, 2014, с. 29-30.
2. Rysbaiuly B., Baimankulov A. Development and justification of the method of calculation the capillary diffusion of the soil. Wulfenia Journal, Austria, *Mar* 2014, Volume 20, Issue 12, 483-500 pp.
3. Жуаспаев, Т.А. Сопряженная задача идентификации обобщенного коэффициента [Текст] / Т.А.Жуаспаев // Бишкек, Известия Вузов, №3, 2014, с. 19-21.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.