Арыков А., Калмаматов Б.

ЫКТЫМАЛДЫКТАР ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Арыков А., Калмаматов Б.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

A. Arykov, B. Kalmatov

ELEMENTS OF THE THEORY OF PROBABILITY

УДК: 517/89.1

Бул макалада азыркы мезгилдеги чыгармачылык менен иштеп баалуу натыйжаларга жетишүү үчүн ыктымалдыктар теориясы менен математикалык статистикалык ыкмаларын билүү зарыл болуп эсептелет.

Негизги сөздөр: *статистика, опыт, теория, ыктымалдык, натыйжа.*

В научной статье раскрывается вопрос о необходимости применения методов теории вероятности и математической статистики в достижении ценных результатов опыта.

Ключевые слова: *статистика, опыт, теория, вероятность, результат.*

In a scientific article deals with the question of the need to apply the methods of probability theory and mathematical statistics in achieving valuable results experience.

Key words: *statistics, experience, theory, probability, result.*

Азыркы мезгилде бардык кесип ээлерине: физиктерге, экономисттерге, аскер кызматкерлерине, химиктерге, врачтарга, инженерлерге, соода кызматкерлерине жана башкаларга өздөрүнүн иштеринде чыгармачылык менен иштеп, баалуу натыйжаларга жетишүү үчүн ыктымалдуулуктар теориясы менен математикалык статистиканын методдорун билүү зарыл болуп калды.

Ыктымалдуулуктар теориясынын негизги түшүнүгү болуп **окуя** эсептелет. Окуялар белгилүү шарттардын аткарылышы менен келип чыгат. Белгилүү шарттардын аткарылышын **сыноо** десек, окуяны сыноонун натыйжасы деп кароого болот.

Ар кандай сыноонун, байкоонун, текшерүүнүн натыйжасы, жыйынтыгы, корутундусу окуя деп аталат.

Окуяларды үчкө бөлөбүз:

1. ишенимдүү окуялар;
2. мүмкүн болбогон окуялар;
3. кокустук окуялар;

Ар бирине токтолуп кетели.

1. Сыноонун натыйжасында сөзсүз келип чыга турган окуяларды ишенимдүү (анык) окуялар деп аталат жана аны грек алфавитинин "Ω" (омега) тамгасы менен белгилейбиз.

М.: жекшембиден кийин дүйшөмбү, кыштан кийин жаз, 8-майдан кийин 9-майдын келиши ишенимдүү окуялар.

2. Сыноонун натыйжасында эч келип чыкпаган окуялар мүмкүн болбогон окуялар деп аталат жана аны "$\emptyset$" белгиси менен белгилейбиз.

М.: эки кубикчени бирге бир жолу таштаганда суммада 14 очко түшөт, жаңы төрөлгөн бала 70 кг чыгат деген окуялар мүмкүн болбогон окуялар болот.

3. Сыноонун натыйжасында келип чыгышы да, келип чыкпашы да мүмкүн болгон окуялар кокустук окуялар деп аталат жана аларды латын алфавитинин чоң тамгалары A, B, C, D, E,… менен белгилейбиз.

М.: тыйынды бир жолу таштаганда Г (герб) түшөт деген окуя кокустук окуя болот. Анткени монетаны бир жолу таштаганда Г жагы менен же Ж (жазуу) жагы менен түшүшү мүмкүн.

Кокустук окуяларды, алардын келип чыгышын эч качан алдын-ала айтууга мүмкүн эмес.

Азыркы учурда ыктымалдуулуктар теориясы менен математикалык статистиканын методдорун түрдүү илимдердин жана эл чарбасынын, аскер самолетторду, танктарды, артиллериялык курал-жарактарды жасоодо ж. б. көп практикалык маселелерди чыгаруу үчүн кеңири колдонулуп келе жатат.

Эки окуянын көбөйтүндүсү мүмкүн болбогон болуп, ал эми суммасы ишенимдүү окуя болсо, мындай окуяларды карама-каршы окуялар деп атайбыз.

б.а $A+\overline{A} = \Omega$ $\quad \overline{A}\cdot A = \emptyset$

A – берилген окуя,

$\overline{A}$ – карама-каршы окуя.

A окуясынын келип чыгышы B окуясынын келип чыгышын жокко чыгарса, анда A жана B окуялары биргелешпеген окуялар деп аталат.

$A \cdot B = \emptyset$, A жана B – биргелешпеген окуялар.

Биргелешпеген окуялардын толук группасын түзгөн окуяларды башка окуялардын суммасына ажыратууга мүмкүн болбосо жана алардын келип чыгуу мүмкүнчүлүктөрү бирдей болсо, анда аларды элементардык окуялар деп атайбыз.

М.: тыйынды бир жолу таштаганда биргелешпеген окуялардын толук группасын түзгөн элементардык окуялар экөө болот. Алар: биринчиси «Г» түшөт деген окуя, экинчиси «Ж» түшөт деген окуя. M_2: Оюн сөөкчөсүн (кубикче) бир жолу таштаганда биргелешпеген окуялардын толук группасын түзгөн элементардык окуялар алтоо. Алар:

E_1 – бир упай түшөт,
E_2 – эки упай түшөт,
E_3 – үч упай түшөт,
E_4 – төрт упай түшөт,

E_5 – беш упай түшөт,

E_6 – алты упай түшөт деген окуялар.

Биргелешпеген элементардык окуялардын толук группасына кирген кайсы бир элементардык окуянын аткарылышы менен, А окуясы келип чыкса, анда ал А окуясына өбөлгө түзүүчү элементардык окуя деп аталат.

М.: А – оюн сөөкчөсүн бир жолу таштаганда жуп упай түшөт деген окуя болсо, ага өбөлгө түзүүчү окуялар E_2, E_4,E_6 болушат.

Аныктама: Эгерде биргелешпеген окуялардын толук группасын түзүшкөн элементардык окуялардын арасынан А окуясынын келип чыгышына элементардык окуялар өбөлгө түзсө, анда $\frac{m}{n}$ катышы, А окуясынын ыктымалдуулугу деп аталат жана Р (А) менен белгиленет.

$$P(A) = \frac{m}{n};$$

M_1: Тыйынды бир жолу таштаганда «Г» жагынан түшүшүнүн ыктымалдуулугун эсептегиле.

А – тыйынды бир жолу таштаганда «Г» түшөт деген окуя болсун.

Анда n = 2, m = 1 ошондуктан $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; болот.

M_2: Оюн сөөкчөсүн бир жолу таштаганда «5» упай түшүшүнүн ыктымалдуулугу $P(A) = \frac{1}{6}$; анткени биргелешпеген окуялардын толук группасын түзгөн элементардык окуялардын саны 6га барабар жана алардын бирөө гана «5» упайдын түшүшүнө өбөлгө түзөт.

Ыктымалдуулуктун классикалык аныктоосунан төмөнкүдөй касиеттери келип чыгат:

$1^0.\ 0 \le P(A) \le 1$ б.а. ар кандай окуянын ыктымалдуулугу 0 менен 1дин арасында болот.

$2^0. P(A) = 1$ б.а ишенимдүү окуянын ыктымалдуулугу 1 ге барабар болот.

$3^0.\ P(A) = 1$ б.а мүмкүн болбогон окуянын ыктымалдуулугу 0 гө барабар болот.

Ыктымалдуулуктарды кошуу.

Биргелешпеген эки А жана В окуялары берилсе, алардын суммасынын ыктымалдуулугун ыктымалдуулук теориясынын негизги теоремасы боюнча эсептөөгө болот.

T_1. (ыктымалдуулуктарды кошуунун теоремасы).

Эгерде А жана В окуялары биргелешпеген окуялар болушса, анда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \text{ болот.}$$

Б.а. биргелешпеген эки окуялардын суммасынын ыктымалдуулугу, ыктымалдуулуктардын суммасына барабар болот. (далилдөөсүнө токтолбойбуз).

М.: Кутудагы 10 кызыл, 5 көк, 10 ак түстөгү бирдей шарлар бар, андан каалагандай алынган бир шардын кызыл же көк болушунун ыктымалдуулугун эсептегиле.

Чыгаруу:

А – каалагандай алынган бир шар кызыл түстүү.

В – каалагандай алынган бир шар көк түстүү деген окуялар болсун, анда А жана В окуялары биргелешпеген болгондуктан:

$$P(A)\frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \qquad P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

$$P(A + B) = P(A) + B(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

Демек, каалагандай алынган шардын кызыл же көк түстүү болушунун ыктымалдуулугу $\frac{1}{2}$ ге барабар.

Ыктымалдуулуктарды көбөйтүү.

Кокустук окуянын ыктымалдуулугун аткарылды деп алынган башка бир кокустук окуядан кийин аныктоого болот. Мындай ыктымалдуулуктар шарттуу ыктымалдуулуктар деп аталат жана P(A/B) белгиленет.

P(A/B) – бул В окуясы аткарылгандан кийинки А окуясынын шарттуу ыктымалдуулугу деп аталат.

М.: Эки оюн сөөкчөсүн бирге таштаганда түшкөн очколордун суммасы жуп экендиги белгилүү болсо, суммада 8 очко түшүшүнүн ыктымалдуулугун эсептегиле.

Чыгаруу: Биргелешпеген окуялардын толук группасын түзгөн элементардык окуялардын санын жана өбөлгө түзүүчү окуялардын санын аныктоо үчүн төмөнкү таблицаны пайдаланабыз.

	1	2	3	4	5	6
1.	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2.	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3.	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4.	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5.	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6.	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Жолчо боюнча I оюн сөөкчөсүнүн мүмкүн болгон очколору.

Мамыча боюнча II оюн сөөкчөсүнүн мүмкүн болгон очколору.

В – эки оюн сөөкчөсүн бирге таштаганда түшкөн очколордун суммасы жуп,

А – суммада 8 очко түшөт деген окуялар.

Таблицадан түшкөн очколордун суммасы мүмкүн болгон учурлардын жарымында (18) жуп жана булардын арасына бешөө А окуясына өбөлгө түзөрү көрүнүп турат. Ошондуктан, В окуясы аткарылды дегенден кийинки А окуясынын шарттуу ыктымалдуулугу.

$P(A/B) = \frac{5}{18};$ барабар болот. Мындан В окуясы аткарылды деген шарт болбосо $P(A) = \frac{5}{36};$ болор эле.

Эгерде А жана В окуяларынын каалаган биринин келип чыгышы, экинчисинин келип чыгышынын ыктымалдуулугун өзгөртпөсө, б.а.

$P(A/B) = P(A);$ жана $P(B/A) = P(B);$

болсо, анда А жана В окуялары көз каранды эмес окуялар деп аталышат.

T_3: (окуялардын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдуулуктары жөнүндөгү теорема).

Каалаган эки А жана В окуяларынын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдуулугу, алардын каалагандай берилген ыктымалдуулугун, ал аткарылды дегенден кийинки экинчисинин шарттуу ыктымалдуулугуна көбөйткөнгө барабар б. а.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A);$$

Улуу Ата Мекендик согушта Советтер Союзунун жана Кыргызстандык жоокерлер согуш талааларында оор артиллериялык куралдар, танктар жана курал жарактар менен кармашкан. Алардын ичинен Кыргызстандан 360 миңден ашык жоокерлер аскерлердин катарында болушкан. 160 миңден ашууну каза болгон. 160 миңден ашык жоокер кайтып келген. 73 Кыргызстандык жоокерлер Советтер Союзунун Баатыры болушкан. Ыктымалдуулуктарды көбөйтүү карата аскердик курал-жарактар боюнча мисалдарга токтолуп кетели.

M_1: Биринчи жоокердин окту душманга тийгизишинин ыктымалдуулугу 0,9.

Экинчи жоокердин окту душманга тийгизишинин ыктымалдуулугу 0,7.

Экөө бир жолудан атты. Экөөнүн тең душманга окту тийгизишинин ыктымалдуулугун эсептегиле.

Чыгаруу: 1-жоокердин душманга тийгизишинин ыктымалдуулугу

$$P(A) = 0{,}9.$$

2-жоокердин душманга тийгизишинин ыктымалдуулугу

$$P(B) = 0{,}7.$$

Ыктымалдуулуктардын көбөйтүндүсүнүн формуласы боюнча

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63$$

M_2: Үч артиллериялык куралдын бутага тийгизиштеринин ыктымалдуулуктары тиешелеш түрдө 0,9, 0,7 жана 0,8 болушса, үчөө бирдей залп атканда, жок дегенде биринин тийгизишинин ыктымалдуулугун эсептегиле.

Чыгаруу:

$P(A_1) = P_1 = 0{,}9 \qquad g_1 = 1 - P_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$P(A_2) = P_2 = 0{,}7 \qquad g_1 = 1 - P_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(A_3) = P_3 = 0{,}8 \qquad g_1 = 1 - P_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

А – жок дегенде бирөө тийгизет деген окуя болсо,

$$P(A) = 1 - g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$$

Толук ыктымалдуулуктун формуласы:

A_1, A_2, A_n – биргелешпеген окуялардын толук группасын түзгөн окуялардын системасы.

В – окуясы алардын каалаган бири менен биргелешип келип чыга тургандай окуя болсун.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i);$$

Толук ыктымалдуулуктун формуласы деп аталат.

A_i – лер гипотезалар деп аталышат.

Демек, гипотезалардын аткарылышынын ыктымалдуулуктары белгилүү болсо жана ал гипотезалар аткарылды дегенден кийинки В окуясынын шарттуу ыктымалдуулугу белгилүү болсо, анда В окуясынын ыктымалдуулугун толук ыктымалдуулуктардын формуласы боюнча эсептөөгө болот.

М.: Снаряд жарылган мезгилде чоң, орточо жана майда осколкаларга 1:3:6 катышында бөлүнөт жана танкага тийгенде анын бронун чоң осколка 0,9, орточосу 0,3 жана майда осколка 0,1 ыктымалдуулук менен көзөйт. Каалагандай бир гана осколка танкага сөзсүз тийсе, анын бронун көзөп өтүшүнүн ыктымалдуулугун эсептегиле.

Чыгаруу: Гипотезаларды аныктайлы:

A_1 – чоң осколка тиет.

A_2 – орточо осколка тиет.

A_3 – майда осколка тиет.

В – тийген осколка танканын бронун көзөп өтөт, анда шарт боюнча:

$P(A_1) = 0{,}1 \qquad P(B/A_1) = 0{,}9$

$P(A_2) = 0{,}3 \qquad P(B/A_2) = 0{,}3$

$P(A_3) = 0{,}6 \qquad P(B/A_3) = 0{,}1$ толук ыктымалдуулуктардын формуласы боюнча:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}24;$$

Адабияттар:

1. Вентцель Е.С. «Теория вероятностей». М.: Наука, 1969 г.
2. Назаров М. Н. Бөрүбаев Т. Б. «Ыктымалдыктар теориясынын элементтери». Жалал-Абад, 1994ж.
3. Данко П.Е. Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах». – Москва «Высшая школа». 1974 г. V глава.
4. Боровиков А.А. «Теория вероятностей». Москва. - 1976 г.
5. Гмурман В.С. «Теория вероятностей и математическая статистика». Москва высшая школа. 1972 г.

Рецензент: доктор философских наук Байгазиев С.