ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

Абдукаримов А.М.

ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЧЕКСИЗ ОБЛАСТТАРДА КВАДРАТТЫК ИНТЕГРАЛДАНЫШЫ

Абдукаримов А.М.

О КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

A.M. Abdukarimov

ABOUT SQUARE-INTEGRABLE SOLUTIONS OF SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE ON UNLIMITED DOMAINS

УДК: 515.14

В работах [1-3] были рассмотрены вопросы об ограниченности решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается о квадратичной интегрируемости решений систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на бесконечных областях.

Ключевые слова: *самосопряженные матричные функции, вектор функции, дифференцируемая вектор функция, интегрирование по частям.*

[1-3] иштерде интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын чексиз областтын жарым огундагы чектелүүсүү каралган.

Бул макалада Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын чексиз областтарда квадраттык интегралданышы изилденет.

Негизги сөздөр: *матрикалык функциялардын өз ара байланышы, функциялык вектор, вектордук функциялардын дифференцияланышы, бөлүктөп интегралдоо.*

In [1-3] considered the question of limiting solutions for an infinite domain of integral and integro-differential equations on the half.

In this paper, we study on the square integrability of solutions of systems of integro-differential equations of Volterra type in the infinite regions.

Key words: *self-adjoint matrix functions, vector functions, differentiable vector function, integration by parts.*

Рассматривается система

$$M(t,x)u_{tx}(t,x)+\int_0^t K(t,x)A(t,x,s)K(s,x)u(s,x)ds+\int_0^x K(t,x)B(t,x,y)K(t,y)u(t.y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x)C(t,x,s,y)K(s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\quad (t,x)\in G=[0,\infty)\times[0,\infty)\ , \tag{1}$$

$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G)\,, \qquad (f')$$

с условиями

$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,\quad +\infty),$$
$$u(t,0)=0,\qquad t\in[0,\quad +\infty), \qquad (*)$$

где $M(t,x),\ A(t,x,s),\ B(t,x,y)$ и $C(t,x,s,y)$ - самосопряженные заданные матричные функции размеров $n\times n$, а $f(t,x),\ K(t,x)$ - заданная, $u(t,x)$ - неизвестная n - мерные вектор-функции.

В работах [1-3] изучены вопросы квадратичной интегрируемости решений на бесконечной области интегральных уравнений на полуоси.

В данной работе изучается квадратичная интегрируемость решений на бесконечной области для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода (1).

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: (f'),

а) вектор-функции $M(t,x), K(t,x) \in C(G), K(t,x) \geq 0, (M(t,x)-1) \geq \alpha > 1$ при $(t,x) \in G$

а) матричные функции $A(t,x,s)$, $A_t(t,x,s)$, $A_s(t,x,s)$, $A_{ts}(t,x,s) \in C_{n\times n}(G_1)$ $G_1 = \{(t,x,s):\ 0 \leq s \leq t < \infty;\quad 0 \leq x < \infty\}$, $A(t,x,0) \geq 0$ и $A_t(t,x,0) \leq 0$ при $(t,x) \in G$; $A_s(t,x,s) \geq 0$ и $A_{ts}(t,x,s) \leq 0$ при $(t,x,s) \in G_1$, $M(t,x), K(t,x) \in C(G)$, $M(t,x) \geq (\alpha - 1) > 0$;

б) матричные функции $B(t,x,y)$, $B_x(t,x,y)$, $B_y(t,x,y)$, $B_{xy}(t,x,y) \in C_{n\times n}(G_2)$ $G_2 = \{(t,x,y):\ 0 \leq t < \infty;\quad 0 \leq y \leq x < \infty\}$, $B(t,x,0) \geq 0$ и $B_x(t,x,0) \leq 0$ при $(t,x) \in G$; $B_y(t,x,y) \geq 0$ и $B_{xy}(t,x,y) \leq 0$ при $(t,x,y) \in G_2$;

в) матричные функции $C(t,x,s,y)$, $C_t(t,x,s,y)$, $C_x(t,x,s,y)$, $C_s(t,x,s,y)$, $C_y(t,x,s,y)$, $C_{tx}(t,x,s,y)$, $C_{ts}(t,x,s,y)$, $C_{sy}(t,x,s,y)$, $C_{ty}(t,x,s,y)$, $C_{tsy}(t,x,s,y)$, $C_{xys}(t,x,s,y)$, $C_{tsxy}(t,x,s,y)$, $\in C_{n\times n}(G_3)$ $G_3 = \{(t,x,s,y):\ 0 \leq s \leq t < \infty;\ 0 \leq y \leq x < \infty\}$, $C_y(t,x,0,y) \equiv 0$ при $(t,x,y) \in G_2$ $C_s(t,x,0,y) \equiv 0$ при $(t,x,s) \in G_1$, $C(t,x,0,0) \geq 0, C_t(t,x,0,0) \leq 0$, $C_x(t,x,0,0) \leq 0$, $C_{tx}(t,x,0,0) \geq 0$ при $(t,x) \in G$ и $C_{sy}(t,x,s,y) \geq 0$, $C_{xys}(t,x,s,y) \leq 0$, $C_{sy}(t,x,s,y) \geq 0$, $C_{tsxy}(t,x,s,y) \geq 0$ при $(t,x,s,y) \in G_3$;

г) Для любых u, $\vartheta \in R^n$ выполняется неравенство

$$< -A_t(t,x,0)u,u > -2 < C(t,x,0,0)u,\vartheta > - < B_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta > \geq 0 \text{ при } (t,x) \in G,$$

- то система уравнений (1) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G) \cap C_n(G)$.

В дальнейшем нам понадобятся легко доказуемые следующие леммы:

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n \times n$ и $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n)$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\left\langle k\vartheta, \vartheta_s \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle k\vartheta,\vartheta\right\rangle_s - \frac{1}{2}\left\langle k_s\vartheta,\vartheta\right\rangle, \text{ где } \left\langle u,\vartheta\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K, ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\nu_{\tau z}\right\rangle = \left\langle K\nu\right\rangle_{\tau z} - \left\langle K_\tau \nu\right\rangle_z - \left\langle K_z\nu\right\rangle_\tau + \left\langle K_{\tau z}\nu\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n \times n$, а $\nu - n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K, ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\vartheta, \vartheta_{sy}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle K\vartheta,\vartheta\right\rangle_{sy} - \frac{1}{2}\left\langle K_s\vartheta,\vartheta\right\rangle_y - \frac{1}{2}\left\langle K_y\vartheta,\vartheta\right\rangle_s + \frac{1}{2}\left\langle K_{sy}\vartheta,\vartheta\right\rangle - \left\langle K\vartheta_s, \vartheta_y\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n \times n$, а $\vartheta(s,y)$ – n – мерный вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части уравнения (2.1.1) скалярно умножим на $u(t,x)$ и проинтегрируем по области $G_{tx} = \{0 \leq s \leq t;\quad 0 \leq y \leq x\}$. Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^x < M(s,y)u(s,y),u(s,y) > dsdy + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < K(s,y)A(s,y,\tau)K(\tau,y)u(\tau,y),u(s,y) > d\tau dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K(s,y)B(s,y,z)K(s,z)u(s,z),u(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y)C(s,y,\tau,z)K(\tau,z)u(\tau,z),u(s,y) > dzd\tau dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < f(s,y),u(s,y) > dyds. \tag{2}$$

Введем обозначение $u_1(t,x) = K(t,x)u(t,x), \quad (t,x) \in G$

при помощью которого перепишем (2) в следующем виде

$$\int_0^t\int_0^x < M(s,y)u(s,y),u(s,y) > dsdy + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y) > d\tau dyds +$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < B(s,y,z)u_1(s,z)u_1(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z)u_1(s,y) > dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x < f(s,y),u(s,y) > dyds. \tag{3}$$

Преобразуем каждый из интегралов в левой части уравнения (3)по формуле интегрирования по частям и используем лемму 2.

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)u_1(\tau,y),u_1(s,y) > d\tau dyds = -\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)d\tau,u_1(s,y) > dyds = \int_0^t\int_0^x < A(s,y,0)\left(\int_0^s u_1(\xi,y)d\xi\right),$$

$$u_1(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < A_\tau(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\xi\right),u_1(s,y) > d\tau dyds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y,0)\left(\int_0^t u_1(\xi,y)d\xi\right),\int_0^t u(\xi,y)d\xi > dy - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_s(s,y,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\times$$

$$\times\int_0^s u_1(\xi,y)d\xi > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi\right),\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi > \times$$

$$\times dyd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t < A_{\tau s}(s,y,\tau)\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\xi > dsdyd\tau.$$

Применив формулу Дирихле, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y) > d\tau dyds = \frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y,0)\int_0^t u_1(\xi,y)d\xi, \int_0^t u(\xi,y)d\xi > dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_s(s,y,0)\int_0^s u_1(\xi,y)d\xi,\int_0^s u_1(\xi,y) > d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi,$$

$$,\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi > dyd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A_{ts}(s,y,\tau)\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\xi > d\tau dyds, \tag{4}$$

где $A_t(t,x,s)$, $A_s(t,x,s)$ - частные производные по t и s соответственно.

Аналогично получим для второго слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < B(s,y,z)u_1(\tau,z)u_1(s,y) > dzdyds = \frac{1}{2}\int_0^t < B(s,x,0)\int_0^x u_1(s,\nu)d\nu, \int_0^x u_1(s,\nu)d\nu > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_y(s,y,0)\int_0^y u_1(s,\nu)d\nu, \int_0^y u_1(s,\nu)d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_z(s,x,z)\int_z^x u_1(s,\nu)d\nu,$$

$$,\int_z^x u_1(s,\nu)d\nu > dzds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < B_{zy}(s,x,\tau)\int_z^y u_1(s,\nu)d\nu, \int_z^y u_1(s,\nu)d\nu > dzdyds. \quad (5)$$

Для преобразования третьего интеграла используем лемму 2.

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z), u_1(s,y) > dzd\tau dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)dzd\tau, u_1(s,y) > dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x\left\{ < \int_0^s\int_0^y\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(C(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_\tau(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{\partial}{\partial z}C_z(s,y,\tau,z)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\tau + C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi\right]dzd\tau, u_1(s,y) > \right\}dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < C(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_\tau(s,y,\tau,0)\times$$

$$\times\int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > d\tau dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_z(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, u_1(s,y) > dzd\tau dyds.$$

Отсюда используя лемму 3 имеем

$$\int_0^t\int_0^x < \int_0^s\int_0^y C(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z), u_1(s,y)dzd\tau > dyds = \frac{1}{2} < C(t,x,0,0)\int_0^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$,\int_0^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)\, d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < C_y(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{sy}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\, d\nu d\xi > dyds - \int_0^t\int_0^x < C(s,y,0,0)\int_0^s u_1(\xi,y)d\xi,$$

$$,\int_0^y u_1(s,\nu)d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t < C_\tau(t,x,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\xi d\nu, \int_\tau^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\xi d\nu > d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < C_{\tau s}(s,x,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > d\tau ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < C_{\tau y}(t,y,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_\tau^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dy d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_{\tau sy}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > d\tau dy ds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu > d\tau dy ds + \frac{1}{2}\int_0^x < C_z(t,x,0,z)\int_0^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,$$

$$,\int_0^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{zs}(s,x,0,z)\int_0^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_0^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y < C_{zy}(t,y,0,z)\int_0^t\int_z^y u_1(\xi,\nu) d\nu d\xi, \int_0^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_{zsy}(s,y,0,z)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_0^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz dy ds$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_z(s,y,0,z)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_z^y u_1(s,y)\,d\nu > dz dy ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < C_{\tau zy}(t,y,\tau,z) \int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz dy d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < C_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > d\tau dz ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)\,d\nu d\xi > dz d\tau dy ds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu > dz d\tau dy ds. \qquad (6)$$

Учитывая формулы (4), (5), (6) и – условия (г), из (3) имеем

$$\int_0^t\int_0^x < M(s,y)u_{sy}(s,y), u(s,y) > ds dy + \frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y,0)\int_0^t u_1(\xi,y)d\xi, \int_0^t u_1(\xi,y)d\xi > dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \Bigg[< -A_s(s,y,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi > -$$

$$-2 < C(s,y,0,0)\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu > - < B_y(s,y,0)\times$$

$$\times\int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu, \int_0^y u_1(s,\nu)\,d\nu > \Bigg] dy ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y \Bigg\{ - < \frac{A_{\tau s}(s,y,\tau)}{y}\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi > -$$

$$-2 < C_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi, \int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu > - < \frac{B_{zy}(s,y,\tau)}{s}\int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu, \int_z^y u_1(s,\nu)\,d\nu > \Bigg\}\times$$

$$\times dzd\tau dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\Big[<A_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi,\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi>dyd\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^x<B_z(s,x,z)\int_z^x u_1(s,\nu)d\nu,\int_z^x u_1(s,\nu)d\nu>+\frac{1}{2}\int_0^x<A(t,y,0)\times$$

$$\times\int_0^x u_1(\xi,y)d\xi,\int_0^t u_1(\xi,y)d\xi>dy+\frac{1}{2}\int_0^t<B(s,x,0)\int_0^x u_1(s,\nu)d\nu,\int_0^x u_1(s,\nu)d\nu>ds+$$

$$+\frac{1}{2}<C(t,x,0,0)\int_0^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t<C_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x<C_y(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<C_{sy}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<C_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>dzd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y<C_{\tau zy}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>dzdyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s<C_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^x u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>d\tau dzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<C_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,\nu)d\nu d\xi>dzd\tau dyds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x<f(s,y),u(s,y)>dyds\,. \tag{7}$$

В силу условий а), б), в) и г) из (7) имеем

$$\int_0^t\int_0^x<M(s,y)u(s,y),u(s,y)>dyds\le\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|\|u(s,y\|dyds\,.$$

$$\alpha\int_0^t\int_0^x\|u(s,y)\|^2\,dyds\le\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|\|u(s,y\|dyds \tag{8}$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского

$$\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|\|u(s,y)\|dyds\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|^2dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\|u(s,y)\|^2dyds\,. \tag{9}$$

В левой части неравенства (8) применяя (9), получим

$$\alpha\int_0^t\int_0^x\|u(s,y)\|^2\,dyds\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|^2dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\|u(s,y)\|^2dyds \tag{10}$$

$$(2\alpha-1)\int_0^t\int_0^x\|u(s,y)\|^2\,dyds\le\int_0^t\int_0^x\|f(s,y)\|^2dyds$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t\int_0^x \left\|u\left(s,y\right)\right\|^2 dyds \le \frac{1}{(2\alpha-1)}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds \text{ при } \left(t,x\right)\in G. \qquad (11)$$

Из последнего неравенства, переходя к пределу при $t\to\infty$ и $x\to\infty$, получим

$$\left\|u\left(t,x\right)\right\|_{L_{2,n}(G)} = \int_0^\infty\int_0^\infty \left\|u\left(s,y\right)\right\|^2 dyds \le \frac{1}{(2\alpha-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds = \frac{1}{(2\alpha-1)}\left\|f\left(t,x\right)\right\|_{L_{2,n}(G)}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. - 352 с.
2. Искандаров С. О принадлежности пространству $L^2\left[t_0,\infty\right)$ решения интегрального уравнения Вольтерра //Тез. докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методом в теории сингулярно-возмущенных уравнений. –Алма-Ата: Наука, 1979. - Ч. 1. - С. 150-151.
3. Искандаров С. Об ограниченности и устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1979. - С. 85-102.
4. Асанов А., Бекешов Т.О. Об одном классе систем интегральных нелинейных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 1997.– Вып. 26 – С. 101- 107.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.