Жанакунова М.О.

РАВНОМЕРНО ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Жанакунова М.О.

ЖАЛПЫЛАНГАН БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН БИР КАЛЫПТУУ АЧЫК ЧАГЫЛДЫРУУЛАРЫ

M.O. Zhanakunova

UNIFORMLY OPENNESS MAPPINGS OF GENERAL UNIFORM SPACES

УДК: 515.12

В настоящей статье исследуются равномерно открытые отображения обобщенных равномерных пространств.

Ключевые слова: *обобщенное равномерное пространство, равномерно открытое отображение, полное обобщенное равномерное пространства.*

Бул илимий макалада жалпыланган бир калыптуу мейкиндиктердин бир калыптуу ачык чагылдыруулары изилденет.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу жалпыланган мейкиндик, бир калыптуу ачык чагылдыруу, толук бир калыптуу жалпыланган мейкиндик.*

In this paper uniformly openness mappings of general uniform space where are studied.

Key words: *general uniform space, uniformly openness mappings, full generalised uniform spaces.*

Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ – равномерно непрерывное отображение обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V) называется равномерно открытым отображением, если для любого открытого покрытия $\alpha\in U$ открытое покрытие $f\alpha$ принадлежит обобщенной равномерности V.

Напомним, что равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V) называется равномерно факторным, если V является сильнейшей обобщенной равномерностью среди всех обобщенных равномерностей, при которых отображения f равномерно непрерывно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякое равномерно открытое отображение является равномерно факторным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ такое покрытие множества Y, что $f^{-1}\gamma\in U$. Пусть $\alpha=f^{-1}\gamma$. Так как отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V) является равномерно открытым, то $f\alpha\in V$. Следовательно $\gamma\in V$. Обратно, пусть $\gamma\in V$. Тогда $f^{-1}\gamma\in U$. Итак, отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является равномерно факторным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Композиция двух равномерно открытых отображений снова является равномерно открытым отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно открытое отображение обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V) и $g:(Y,V)\to(Z,W)$ - равномерно открытое отображение обобщенного равномерного пространства (Y,V) на обобщенное равномерное пространство (Z,W). Покажем, что отображение $g\circ f:(X,U)\to(Z,W)$ обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Z,W) является равномерно открытым. Пусть $\alpha\in U$ – произвольное открытое покрытие. Тогда $f\alpha\in V$. В свою очередь, для $f\alpha\in V$ имеем, что $g(f\alpha)\in W$, т.е. $(g\circ f)\alpha\in W$. Значит, $g\circ f:(X,U)\to(Z,W)$ – равномерно открытое отображение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно открытое отображение обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V). Если B – база обобщенной равномерности U, то семейство $B^*=\{f\alpha:\alpha\in B\}$ является базой обобщенной равномерности V.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta \in V$ – произвольное покрытие. Тогда $f^{-1}\beta \in U$. Так как B - является базой для U, то существует такое покрытие $\gamma \in \beta$, что $\gamma \succ f^{-1}\beta$. В силу равномерной открытости отображения f и из $f\gamma \succ \beta$ следует, что $f\gamma \in \hat{A}^*$. Следовательно, B^* является базой обобщенной равномерности V.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно открытое отображение обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V). Тогда $w(V)\le w(U)$.

Напомним, что обобщенное равномерное пространство (X,U) называется симметризуемым в том и только в том случае, если существует симметрика d, порождающая обобщенную равномерность. Определение симметризуемости обобщенного равномерного пространства можно сформулировать следующей эквивалентной форме: обобщенное равномерное пространство симметризуемо тогда и только тогда, когда обобщенная равномерность U имеет счетную базу.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно открытое отображение обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V). Если (X,U) - симметризуемо, то и (Y,V) - симметризуемо.

Пусть (X,U) обобщенное равномерное пространство. Индекс ограниченности $l(U)$ обобщенного равномерного пространства $\le \tau$, если обобщенная равномерность U имеет базу состоящую из покрытий мощности $\le \tau$.

ТЕОРЕМА 1. Каждое обобщенное равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного обобщенного равномерного пространства (Y,V) того же веса $w(V)\le w(U)$ и того же индекса ограниченности $l(V)=l(U)$ при равномерно открытом отображении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - обобщенное равномерное пространство и $w(U)=\tau$, $l(U)=\lambda$. Тогда найдется такая база B обобщенной равномерности U, что $|\hat{A}|=\tau$ и B состоит из открытых покрытий мощности $\le\lambda$. Каждое покрытие $\alpha\in\hat{A}$ рассмотрим как пространство с дискретной обобщенной равномерностью. Пусть $\prod\{\alpha:\alpha\in\hat{A}\}$ – произведение дискретных обобщенных равномерных пространств. Точку $\mu=\{\grave{A}_\alpha:\alpha\in\hat{A}\}$, где $\grave{A}_\alpha\in\alpha$, будем называть отмеченной, если $\cap\{\grave{A}_\alpha:\alpha\in\hat{A}\}=\{\tilde{o}\}$ для некоторой точки $\tilde{o}\in\tilde{O}$. Через Y обозначим множество всех отмеченных точек произведения $\prod\{\alpha:\alpha\in\hat{A}\}$. Построим обобщенную равномерность следующим образом. Для любых $\alpha\in\hat{A}$, $\grave{A}_\alpha\in\alpha$ положим

$$O(\grave{A}_\alpha)=\{\mu'=\{\grave{A}'_\alpha:\alpha\in\hat{A}\}:A'_\alpha=A_\alpha\},$$

$O(\alpha)=\{O(A_\alpha):A_\alpha\in\alpha\}$. Теперь покажем, что $O(\alpha)$ - дизъюнктное покрытие множества Y. Пусть $\mu\in Y$ - произвольный элемент, где $\mu=\{A_\alpha:\alpha\in B\}$. Тогда $A_\alpha\in\alpha$, $\mu\in O(A_\alpha)$. Предположим, что $\mu\in O(A'_\alpha)$ и $\mu\in O(A''_\alpha)$. Тогда $A_\alpha=A'_\alpha$ и $A_\alpha=A''_\alpha$. Отсюда следует, что $O(A'_\alpha)=O(A''_\alpha)$. Следовательно, $O(\alpha)$- дизъюнктное покрытие. Далее легко видеть, что семейство $B'=\{O(\alpha):\alpha\in\hat{A}\}$ является базой обобщенной равномерности V состоящая из открытых покрытий. Также легко видеть, что отображение $f:(Y,V)\to(X,U)$ обобщенного равномерного пространства (Y,V) на обобщенное равномерное пространство (X,U) является равномерно открытым отображением. Это следует из следующего соотношения $fO(\alpha)=\alpha$, т.е. $fO(A_\alpha)=A_\alpha$ для любого $\grave{A}_\alpha\in\alpha$. По построению обобщенного равномерного пространства (Y,V) имеем $w(V)=\tau$ и $l(V)=\lambda$.

ТЕОРЕМА 2. В классе обобщенных равномерных пространств обобщенные равномерные пространства, имеющие базы, которые состоят из точечно конечных покрытий, и только они являются образами нульмерных обобщенных равномерных пространств при равномерно открытых отображениях таких, что прообраз каждой точки компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - обобщенное равномерное пространство. Пусть B - база обобщенного равномерного пространства (X,U), состоящая из точечно конечных покрытий. Как и в доказательстве теоремы 1, по базе B построим обобщенное равномерное пространство (Y,V) и равномерное открытое отображение $f:(Y,V)\to(X,U)$. Семейство $\{A\in\alpha:A\ni x\}$ конечно для любых $\alpha\in B$ и $x\in X$, так как база B состоит из точечно конечных покрытий.

Положим $f^{-1}x = \prod\{\alpha : \alpha \in B\}$ для любого $x \in X$. Тогда $f^{-1}x$ является компактным подпространством как произведение конечных дискретных обобщенных равномерных пространств.

Теперь, пусть обобщенное равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного обобщенного равномерного пространства (Y,V) при равномерно открытом отображении f таком, что $f^{-1}x$ компактно для любых $x \in X$. Обобщенное равномерное пространство (Y,V) имеет базу N, состоящую из дизъюнктных открытых покрытий. Тогда, как нам известно, система $fN = \{f\alpha : \alpha \in N\}$, где $f\alpha = \{fA : A \in \alpha\}$ является базой обобщенного равномерного пространства (X,U). Так как количество элементов дизъюнктного открытого покрытия $\alpha \in N$, пересекающихся с компактным подпространством $f^{-1}x$ конечно, то каждое покрытие $f\alpha$ является точечно конечным покрытием.

Пусть (X,U) - обобщенное равномерное пространство а $\Im$ - фильтр в X. Фильтр $\Im$ называется фильтром Коши в обобщенном пространстве (X,U), если $\alpha \cap \Im \neq \varnothing$ для $\alpha \in U$.

Пусть (X,τ) – топологическое пространство. Фильтр $\Im_x$ в X называется фильтром окрестностей точки x в (X,τ), если внутренность каждого элемента фильтра $\Im$ относительно топологии τ содержит точку x. Говорят, что фильтр $\Im$ сходится в (X,τ) к точке x, если $\Im$ сильнее, чем фильтр $\Im_x$ окрестностей точки x. Фильтр $\Im$ в обобщенном пространстве (X,U) называется сходящимся к точке $x \in X$, а точка x - пределом фильтра $\Im$, если он сходится к точке $x \in X$ в (X,τ_U). Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения фильтра $\Im$ в (X,U), если x является точкой прикосновения каждого элемента фильтра $\Im$ в (X,τ_U).

Обобщенное равномерное пространство (X,U) называется полным, если всякий фильтр Коши в нем сходится.

ТЕОРЕМА 3. Пусть отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ обобщенного равномерного пространства (X,U) на обобщенное равномерное пространство (Y,V) является равномерно открытым. Если обобщенное равномерное пространство (Y,V) и прообраз каждой точки $y \in Y$ являются полными обобщенными равномерными пространствами, то обобщенное равномерное пространство (X,U) также является полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Im$ - произвольный фильтр Коши в (X,U). Из равномерной непрерывности отображения f следует, что фильтр $f\Im = \{fF : F \in F\Im\}$ является фильтром Коши (Y,V). Пусть B – база обобщенной равномерности U, состоящая из открытых покрытий. Тогда для любого $\alpha \in U$ существует $A_\alpha \in \alpha$ такое, что $A_\alpha \in \Im$. Легко видеть, что семейство $\{A_\alpha : \alpha \in B\}$ образует базу фильтра Коши $\Im$. В силу равномерной открытости отображения f следует, что семейство $fB = \{f\alpha : \alpha \in B\}$ является базой обобщенной равномерности V, а семейство $\{fA_\alpha : \alpha \in B\}$ базой для фильтра Коши $f\Im$. Так как обобщенное равномерное пространство (Y,V) полно, то фильтр Коши $f\Im$ сходится к некоторой точке $y \in Y$.

Тогда фильтр Коши $f\Im$ является сильнее чем фильтр окрестностей B_y точки y. Не ограничивая общности будем считать, что B_y является фильтром Коши. Ясно, что $fB_y \subset \Im$. Легко видеть, что $f^{-1}y \cap f^{-1}O_y \neq \varnothing$ для любого $O_y \in B_y$. Положим $\Im_y = \{f^{-1}O_y \cap f^{-1}y : O_y \in B_y\}$. Тогда фильтр $\Im_y$ является фильтром Коши в полном обобщенном равномерном подпространстве $\left(f^{-1}y, U_{f^{-1}y}\right)$. Отсюда следует, что он сходится к некоторой точке $x \in f^{-1}y$. Тогда фильтр Коши $f^{-1}B_y$ тем более фильтр Коши $\Im$ сходится также к точке $x \in X$. Следовательно, обобщенное равномерное пространство (X,U) полно.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Ф.: Илим, 1990.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерных отображений. Б.: Илим, 2013.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор академик Борубаев А.А.