Сагынбаева М.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Сагынбаева М.

ГРАВИТАЦИЯЛООЧУ ИДЕАЛДЫК СУЮКТУКТУН АВТОМОДЕЛДИК КЫЙМЫЛЫ

M. Sagynbaeva

SELF-SIMILAR MOTION OF A GRAVITATIONAL PERFECT FLUID

УДК:547.32/49

Рассмотрена автомодельная задача о гравитационном коллапсе облака идеальной жидкости в сопутствующей системе координат. Показано, что для случая уравнения состояния $p = k\varepsilon$ *(k – произвольная константа) используемая автомодельность допускает рассмотрение эволюции только однородных конфигураций.*

Ключевые слова: *плотность энергии, радиальные расстояния, гравитационный коллапс.*

Коштолгон координата системасындагы идеалдык суюктуктун булутчасынын гравитациялык коллапсы жөнүндө автомоделдик маселе каралган. Абалдын теъдемесинин $p = k\varepsilon$ *(k – эркин туруктуулук) учуру щчщн колдонулган автомоделдщщлщк бир тектщщ конфигурациялардын гана эволюциясын кароого мүмкүндүк берет.*

Негизги сөздөр: *энергиянын сыйымдуулугу, радиалдык аралыктар, гравитациялык коллапс.*

We consider the problem of gravitational collapse of a cloud of perfect fluid in the comoving coordinate system. It is shown that in the case of the equation of state $p = k\varepsilon$ *(k – an arbitrary constant) using self-similarity allows consideration of evolution of only homogeneous configurations.*

Key words: *the energy density, radial distance, gravitational collapse.*

Введение

Проблема коллапса относится к числу ключевых проблем астрофизики. В простейшем случае рассматривается коллапс сферически-стмметричной конфигурации с однородной плотностью распределения вещества и равным нулю давлением [1,2]. Это дает возможность находить аналитические решения, анализ которых позволяет судить о качественном прохождении процесса коллапса. Естественно, рост плотности вещества в процессе коллапса заставляет в конечном итоге вводит в рассмотрение более сложные модели с уже неоднородным распределением вещества и не равным нулю давлением (градиентом давления). Однако, как указывается в [3,4], по мере приближения к сингулярности общий характер поведения решений уже перестает быть зависимым от конкретного вида уравнения состояния вещества.

До конца 1990-х годов исследования моделей компактных конфигураций и процесса коллапса в основном были сосредоточены на рассмотрении таких моделей, в которых вещество обладало положительным (или равным нулю) давлением. Однако ситуация изменилась после открытия ускоренного расширения современной Вселенной [5,6]. Как сейчас принято считать, это ускорение обусловлено наличием во Вселенной некой антигравитирующей субстанцией с отрицательным давлением $p < -1/3\varepsilon$, где ε – плотность энергии (см. обзоры [7,8]). Предполагается, что такая субстанция, названная темной энергией, однородно распределена в пространстве и составляет более 70% от полной массы Вселенной. Однако не исключена возможность, что она все же может оказывать влияние на формирование структуры Вселенной в малых масштабах порядка галактик или даже меньше (см. обсуждение этого вопроса в [9]).

В этой связи в литературе имеется ряд работ, посвященных моделированию компактных астрофизических объектов (звезд), образованных темной энергией. В настоящее время исследования ведутся по двум основным направлениям: (1) рассмотрение статических конфигураций с целью демонстрации принципиальной возможности существования таких объектов и их стабильности [10-16]; (2) изучение, хотя бы в общих чертах, возможного процесса образования таких компактных конфигураций посредством гравитационного сжатия (коллапса) [9,17-19]. В принципе, полное исследование такого рода задач требует рассмотрения дифференциальных уравнений в частных производных, зависящих от пространственной R и временной t координат, что само по себе является сложной задачей. Но на начальном этапе представляется разумным рассмотрение более узкого класса задач в автомодельных переменных, когда ищутся решения, зависящие от определенной комбинации (R,t). Это позволяет сводить уравнения в частных производных к уравнениям в обыкновенных производных, тем самым упрощая анализ таких систем. Автомодельные задачи в рамках ОТО были подробно исследованы в работе [20]. Авторы рассматривали эти решения в космологическом контексте в предположении сферически-симметричного распределения гравитирующей идеальной жидкости. В качестве автомодельных переменных выбиралась одна из возможных форм таких переменных. Было показано, что этом случае существуют автомодельные решения первого типа. В дальнейшем в работе [21] была введена классификация таких автомодельных решений. В работе [22] эта же автомодельность была использована для исследования автомодельных космологических решений с темной энергией. В статье [23] была рассмотрена эволюция анизотропной темной жидкости с автомодельностью второго рода.

В этой статье мы рассмотрим коллапс сферической конфигурации с использованием автомодельности первого рода и автомодельных переменных, отличных от [20-22].

Уравнения и решения

При рассмотрении процесса коллапса особенно удобно пользоваться сопутствующей системой координат, исключающей наличие шварцшильдовской сингулярности и позволяющей проследить движение вещества вплоть до центра конфигурации. Для этого выберем метрику в виде

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dR^2 - r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right), \quad (1)$$

где метрические функции ν, λ, r зависят от времени t и радиальной координаты R. Используя эту метрику, могут быть найдены соответствующие уравнения Эйнштейна (см. например [4]). Эти уравнения в значительной степени упростятся, если ввести в рассмотрение массу вещества m, заключенного внутри объема радиуса R (такая функция для массы была введена в работе [24])

$$m = \frac{1}{2}\frac{c^2 r}{G}\left(1 + e^{-\nu}\dot{r}^2 - e^{-\lambda}r'^2\right), \quad (2)$$

где G - ньютоновская константа тяготения, а точка и штрих означают производные по t и R соответственно. Тогда, используя (2), система уравнений из [4] может быть переписана в виде

$$\dot{m} = -\frac{4\pi}{c^2} p r^2 \dot{r}, \quad (3)$$

$$m' = \frac{4\pi}{c^2} \varepsilon r^2 r', \quad (4)$$

$$\nu' = -\frac{2p'}{p+\varepsilon}, \quad (5)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{p+\varepsilon} - 4\frac{\dot{r}}{r}. \quad (6)$$

Здесь ε и p есть плотность энергии и давление вещества, ур. (3) – $\binom{R}{R}$ компонента уравнений Эйнштейна, (4) – $\binom{t}{t}$ компонента, а уравнения (5) и (6) получены из закона сохранения $T^k_{i;k} = 0$.

Исходя из общей теории размерностей [25], для системы уравнений (2)-(6) определяющими константами движения являются

$$[a] = [1/2c^2/G] = [M/L], \quad [c] = [L/T].$$

Первая из этих констант содержит символ массы и поэтому может быть использована для построения автомодельных переменных для m, ε, p. С помощью второй константы, имеющей размерность скорости, строится единственно возможный безразмерный параметр ξ,

$$\xi = \frac{R}{ct}.$$

Вводя далее безразмерные представители ρ, X, Y, M, P, E для метрических функций r, ν, λ, давления p и плотности энергии ε соответственно,

$$r = R\rho(\xi), \quad e^{-\nu} = X(\xi), \quad e^{-\lambda} = Y(\xi), \quad (7)$$

$$m = \frac{1}{2G} RM(\xi), \quad p = \frac{1}{2G}\frac{1}{c^2 t^2}P(\xi), \quad \varepsilon = \frac{1}{2G}\frac{1}{c^2 t^2}E(\xi), \quad (8)$$

перепишем систему уравнений (2)-(6) в следующем виде:

$$M = \rho\left(1 + X\xi^4\rho_\xi^2 - Y(\rho + \xi\rho_\xi)^2\right), \quad (9)$$

$$M_\xi = -4\pi\xi^2 P\rho^2\rho_\xi, \quad (10)$$

$$M + \xi M_\xi = 4\pi\xi^2 E\rho^2(\rho + \xi\rho_\xi), \quad (11)$$

$$\frac{X_\xi}{X} = \frac{2P_\xi}{P+E}, \quad (12)$$

$$\frac{Y_\xi}{Y} = 4\frac{E}{\xi(P+E)} + 2\frac{E_\xi}{P+E} + 4\frac{\rho_\xi}{\rho}, \quad (13)$$

где индекс ξ означает производную по автомодельной переменной ξ.

Эта система была получена в работе Гуровича [26]. С ее помощью были рассмотрены два случая движения сплошной среды: когда давление равно нулю (задача Толмана [1]) и случай сверхжесткого уравнения состояния Зельдовича $p = \varepsilon$. Здесь мы обобщим эти результаты на случай уравнение состояния

$$p = k\varepsilon$$

с произвольным постоянным параметром $k \neq -1$.

Для нахождения решения системы (9)-(13) поделим сначала ур. (11) на (10). Будем иметь:

$$\frac{M + \xi M_\xi}{M_\xi} = -\frac{1}{k}\frac{\rho + \xi\rho_\xi}{\rho_\xi}. \quad (14)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$M = \alpha\xi^m, \quad \rho = \beta\xi^n, \quad (15)$$

где α, β – произвольные константы. Тогда из (14) имеем связь на m и n:

$$kn(m+1) = -m(n+1). \quad (16)$$

Далее, используя (15), из (10) и (11) имеем

$$P=-\frac{\alpha m}{4\pi\beta^3 n}\xi^{m-3n-2},\quad E=-\frac{\alpha m}{4\pi k\beta^3 n}\xi^{m-3n-2}.$$

Используя найденные выражения на представители давления и плотности энергии, из (12) и (13) имеем следующие выражения на представители метрических функций

$$X=X_0\xi^{2k(m-3n-2)/(k+1)},\quad Y=Y_0\xi^{2(m-n+2kn)/(k+1)},$$

где X_0, Y_0 - константы интегрирования. Далее, подставив полученные формулы в (9), будем иметь:

$$\frac{\alpha}{\beta}\xi^{m-n}=1+X_0\beta^2 n^2\xi^{2[1+n+k(m-2n-1)]/(k+1)}-$$
$$-Y_0\beta^2(1+n)^2\xi^{2(m+3kn)/(k+1)}.$$

Для выполнения этого равенства необходимо наложить связи на константы

$$Y_0\beta^2(1+n)^2=1,\quad \alpha=X_0\beta^3 n^2, \tag{17}$$

а показатели степени в (15), с учетом (16), должны выражаться через параметр уравнения состояния k следующим образом:

$$n=-\frac{2}{3(k+1)},\quad m=\frac{2k}{k+1}.$$

Используя полученные соотношения и выражения (7), (8) для представителей, будем окончательно иметь

$$E=\frac{3\alpha}{4\pi\beta^3}\quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{3\alpha}{8\pi G\beta^3}\frac{1}{c^2(t_0-t)^2}, \tag{18}$$

$$P=\frac{3\alpha k}{4\pi\beta^3}\quad\Rightarrow\quad p=\frac{3\alpha k}{8\pi G\beta^3}\frac{1}{c^2(t_0-t)^2}, \tag{19}$$

$$X=X_0\quad\Rightarrow\quad e^{-\nu}=X_0=const, \tag{20}$$

$$Y=Y_0\xi^{\frac{4}{3(k+1)}}\quad\Rightarrow\quad e^{-\lambda}=Y_0\left(\frac{R}{c(t_0-t)}\right)^{\frac{4}{3(k+1)}}, \tag{21}$$

$$M=\alpha\xi^{\frac{2k}{k+1}}\quad\Rightarrow\quad m=\frac{\alpha}{2G}R\left(\frac{R}{c(t_0-t)}\right)^{\frac{2k}{k+1}}, \tag{22}$$

$$\rho=\beta\xi^{-\frac{2}{3(k+1)}}\quad\Rightarrow\quad r=\beta R\left(\frac{c(t_0-t)}{R}\right)^{\frac{2}{3(k+1)}}. \tag{23}$$

Отметим, что здесь мы заменили t на (t_0-t), что допустимо в автомодельных решениях. Таким образом видно, что, с учетом связи (17), полное решение зависит от двух произвольных констант, что соответствует наибольшему возможному числу "физически`` различных произвольных функций: распределению плотности материи и радиальных скоростей [4,26].

Из найденных решений также видно, что автомодельность вида (7), (8) реализуется только при однородном распределении вещества в сфере согласно ур. (18), (19) в независимости от параметра k. При этом плотность энергии в процессе коллапса стремится к бесконечности как $(t_0-t)^{-2}$, а окружные и радиальные расстояния согласно (21) и (23) стремятся к нулю по одинаковому закону : $(t_0-t)^{2/3(k+1)}$.

Далее, полагая в (20) $X_0=1$, можно ввести синхронно-сопутствующую систему отсчета во все пространстве, когда временная координата t будет представлять собой собственное время в каждой точке пространства [это происходит вследствие отсутствия градиента давления, см. (19)]. В этом случае каждой частице вещества отвечает определенное значение R, а функция $r(t,R)$ при этом значении R определяет закон движения данной частицы. При этом радиальная скорость этой частицы есть $\dot{r}$ [4].

Т.о. из полученных выше решений видно, что решения такого типа неизбежно приводят к коллапсу однородной конфигурации с образованием сингулярности и горизонта событий (создание черной дыры). Чтобы избежать этого Мазур и Моттола [10,29] предложили альтернативную модель так называемой «gravastar», которая также образуется в процессе коллапса, но не имеет ни сингулярности, ни горизонта событий. В этом сценарии предполагается, что в области, где ожидается формирование горизонта событий, имеет место фазовый переход в вакуумное состояние. Образующаяся при этом область вблизи центра конфигурации становится заполненной вакуумом с УС $p=-\varepsilon$, обеспечивающим силы отталкивания, предотвращающие коллапс. (Отметим здесь, что идея о замене шварцшильдовской центральной сингулярности вакуумным состоянием была высказана в работах Сахарова [27] и Глинера [28].) Однако, как видно из полученных здесь решений (18)-(23), в случае малейшего отклонения от вакуумного состояния $p=-\varepsilon$ в ту или другую сторону предотвратить коллапс не удается. Т.о., если в случае изначально однородного распределения материи в процессе сжатия не происходит нарушения однородности, то остановить такой коллапс не удается ни при каких уравнениях состояния. Эта ситуация аналогична наличию начальной космологической сингулярности в моделях Фридмана. Эта аналогия становится еще более полной, если рассмотреть движение выделенного объема вещества с $R=const$. В этом случае решения на метрические функции (21) и (23) по сути будут соответствовать космологическим решениям Фридмана для масштабного фактора [4]. Это указывает на необходимость рассмотрения более общих (неоднородных и/или анизотропных) моделей коллапса с целью возможности исключения шварцшильдовской центральной сингулярности.

Литература:

1. R. G. Tolman, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 20, 169 (1934).
2. J.R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. 56, 455 (1939).
3. E. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, Zh. Exp. Theor. Fiz. 39, 149 (1960).
4. L. Landau and E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields 4^{th} Edition, Section 104, Reed International Educational and Professional Publishing, Ltd. (1975).
5. S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], Astrophys. J. 517, 565 (1999) [arXiv:astro-ph/9812133].
6. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], Astron. J. 116, 1009 (1998) [arXiv:astro-ph/9805201].
7. V. Sahni, Lect. Notes Phys. 653, 141 (2004) [arXiv:astro-ph/0403324].
8. V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D 15, 2105 (2006) [arXiv:astro-ph/0610026].
9. D. F. Mota and C. van de Bruck, Astron. Astrophys. 421, 71 (2004) [arXiv:astro-ph/0401504].
10. P. O. Mazur and E. Mottola, ``Dark energy and condensate stars: Casimir energy in the large," arXiv:gr-qc/0405111.
11. Dymnikova and E. Galaktionov, Class. Quant. Grav. 22, 2331 (2005) [arXiv:gr-qc/0409049].
12. F. S. N. Lobo, Class. Quant. Grav. 23, 1525 (2006) [arXiv:gr-qc/0508115].
13. . DeBenedictis, D. Horvat, S. Ilijic, S. Kloster and K. S. Viswanathan, Class. Quant. Grav. 23, 2303 (2006) [arXiv:gr-qc/0511097].
14. DeBenedictis, R. Garattini and F. S. N. Lobo, Phys. Rev. D 78, 104003 (2008) [arXiv:0808.0839 [gr-qc]].
15. V. Gorini, U. Moschella, A. Y. Kamenshchik, V. Pasquier and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D 78, 064064 (2008) [arXiv:0807.2740 [astro-ph]].
16. V. Gorini, A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, O. F. Piattella and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D 80, 104038 (2009) [arXiv:0909.0866 [gr-qc]].
17. R. G. Cai and A. Wang, Phys. Rev. D 73, 063005 (2006) [arXiv:astro-ph/0505136].
18. U. Debnath and S. Chakraborty, Int. J. Theor. Phys. 47, 2663 (2008) [arXiv:gr-qc/0601049].
19. S. Lee and K. W. Ng, arXiv:0910.0126 [astro-ph.CO].
20. M. E. Cahill and A. H. Taub, Commun. Math. Phys. 21, 1 (1971).
21. J. Carr and A. A. Coley, Phys. Rev. D 62, 044023 (2000) [arXiv:gr-qc/9901050].
22. T. Harada, H. Maeda and B. J. Carr, Phys. Rev. D 77, 024022 (2008) [arXiv:0707.0528 [gr-qc]].
23. F. C. Brandt, R. Chan, M. F. A. Da Silva and J. F. Villas da Rocha, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1407 (2006).
24. M. A. Podurets, Sov. Astron. Journ. 8, 19 (1964).
25. Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena, New York: Academic Press (1966/1967).
26. V. Ts. Gurovich, Dokl. AN USSR 169, 62 (1966).
27. D. Sakharov, Sov. Phys. JETP 22, 241 (1966).
28. B. Gliner, Sov. Phys. JETP 22, 378 (1966).
29. P. O. Mazur and E. Mottola, ``Gravitational Con- densate Stars: An Alternative to Black Holes," arXiv:gr-qc/0109035.

Рецензент: д.ф.-м.н. Фоломеев В.Н.