Укуев Б.Т., Абыкеев К.Ж.

ТЕГИЗДИКТЕГИ СЕРПИЛГИЧ ТОЛКУНДАРДЫН ЧӨЙРӨДӨГҮ БОШТУК МЕНЕН ӨЗ АРА АРАКЕТТЕНҮҮСҮ ЖӨНҮНДӨГҮ МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮ

Укуев Б.Т., Абыкеев К.Ж.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ С ПОЛОСТЬЮ В СРЕДЕ

B.T. Ukuev, K.J. Abykeev

SOLUTIONS OF THE TASK ON INTERACTION OF FLAT ELASTIC WAVE WITH THE CAVITY IN THE ENVIRONMENT

УДК: 517.958

Бул иште убакыттын ар кандай учурлары үчүн көңдөйдөн сырткары жайгашкан Ω чөйрөсүнүн параметрлери аныктала турган тегиздиктеги серпилгич толкундардын чөйрөдөгү боштук менен өз ара аракеттенүүсү жөнүндөгү маселелер чечилет.

***Негизги сөздөр:** серпилгич толкундар, чөйрөдөгү көңдөй, цилиндр түрүндөгү бет, серпилгич толкундардын чеги, чөйрөнүн теңдемеси, узунунан кеткен толкундар, туурасынан кеткен толкундар, чыңалуунун σ_{nn} нормалдуу жана σ_{ne} жанына компоненттери, жылышуу векторy.*

В данной работе решается задача о взаимодействии плоской упругой волны с полостью в среде, где определяется параметры среды в области Ω, расположенной вне полости для различных моментов времени.

***Ключевые слова:** упругая волна, полость в среде, цилиндрическая поверхность, фронт упругой волны, уравнения среды, продольные волны, поперечные волны, нормальные σ_{nn} и касательные σ_{ne} компоненты напряжения, вектор смещения.*

The problem about interaction of flat elastic wave is solved with cavity in the environment where is defined environment parameters in the area located out of cavity for various timepoints was considered in this work.

***Key words:** elastic wave, cavity in the environment, cylindrical surface, the front of an elastic wave, the environment equation, longitudinal waves, cross waves, normal and tangent components of tension, shift vector.*

Пусть в неограниченном пространстве распространяется плоская одномерная упругая волна, которая в момент времени $t = 0$ набегает на полость в среде и в последующие моменты времени взаимодействует с ней. Задача заключается в том, чтобы определить параметры среды в области Ω, расположенной вне полости для различных моментов времени. Будем считать, что граница полости S представляет собой бесконечно длинную цилиндрическую поверхность с замкнутым контуром поперечного сечения. Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ фронт упругой волны касается границы полости вдоль ее образующей.

Начало $\overline{\mathrm{O}}$ прямоугольной декартовой системы координат $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{xyz}}$ совместим с какой-нибудь точкой образующей границы полости, вдоль которой в момент t=0 фронт упругой волны касается ее. Ось $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{x}}$ направим вдоль касательной к контуру поперечного сечения полости, ось $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{y}}$ - вдоль образующей полости, а ось $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{z}}$ перпендикулярно к осям $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{x}}$ и $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{y}}$ в глубь среды.

Контур поперечного сечения границы полости обозначим через L. Кроме системы координат $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{xyz}}$, введем в рассмотрение так же локальные системы координат Oxyz для каждой точки O линии L. Ось Ox направим вдоль касательной к линии L, ось $\overline{O}\overline{y}$ - вдоль образующей границы полости, а ось Oz - перпендикулярно к осям $\overline{O}\overline{x}$ и $\overline{O}\overline{y}$ в глубь среды.

Как известно [1], уравнение среды при отсутствии массовых сил имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) graddiv\vec{v} + \mu\Delta\vec{v}, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$ - вектор перемещения, ρ_0 - начальная плотность среды, λ, μ - константы Ламэ, Δ - оператор Лапласа.

Уравнению (1) удовлетворяет, как показано в [1], векторная функция вида $\vec{v} = grad\varphi + rot\vec{\psi}$, при условию, что $\varphi, \vec{\psi}$ являются решениями волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = b^2 \Delta \vec{\psi}, \tag{3}$$

соответственно. Причем $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$ - скорость распространения продольных волн, $b = \sqrt{\mu/\rho_0}$ - скорость распространения поперечных волн, а функция $\vec{\psi}$ должна удовлетворять еще условию:

$$div\vec{\psi} = 0 \tag{4}$$

Не трудно показать, что в рассматриваемом плоском случае вектор $\vec{\psi}$ параллелен оси y и не зависит от y. Поэтому соотношение (4) выполняется тождественно, а вместо векторного уравнения (3) достаточно рассматривать скалярное уравнение.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \psi, \tag{5}$$

где ψ - проекция вектора $\vec{\psi}$ на ось Oy.

Учитывая специфику рассматриваемой плоской задачи, граничные условия достаточно задавать на контуре C, по которому плоскость Oxy пересекает границу плоскости, а параметры среды определять в сечении рассматриваемой пространственной области указанной плоскостью.

Краевые условия состоят в том, что нагрузка на границе полости отсутствует. Следовательно, нормальные σ_{nn} и касательные σ_{ne} компоненты напряжения в произвольной точке M^1 упомянутого выше контура C обращаются в нуль в любой момент времени t:

$$\sigma_{nn}(M^1, t) = 0, \quad \sigma_{ne}(M^1, t) = 0 \qquad (M^1 \in C) \tag{6}$$

Для определенности примем, что упругая волна, набегающая на полость, является продольной.

Пусть $\varphi_1(M, t)$, - потенциал смещений для упругой среды, обусловленный в безграничном пространстве исключительно указанной волной, причем M - точка среды. Функцию $\varphi(M, t)$, которая должна удовлетворять волновому уравнению (2) и, совместно с функцией $\psi(M, t)$, также граничным условиям (6), целесообразно отыскивать в виде

$$\varphi(M, t) = \varphi_1(M, t) + \varphi_2(M, t), \tag{7}$$

где функция $\varphi_2(M, t)$ подлежит непосредственному определению. Тогда граничные условия (6) можно представить в виде:

$$\sigma_{nn}^{(1)}(M^1, t) + \sigma_{nn}^{(2)}(M^1, t) = 0, \quad \sigma_{ne}^{(1)}(M^1, t) + \sigma_{ne}^{(2)}(M^1, t) = 0 \qquad (M^1 \in C), \tag{8}$$

где величины $\sigma_{nn}^{(1)}(M^1, t)$, $\sigma_{ne}^{(1)}(M^1, t)$ обусловлены потенциалом смещений $\varphi_1(M, t)$, а $\sigma_{nn}^{(2)}(M^1, t)$, $\sigma_{ne}^{(2)}(M^1, t)$ - потенциалами смещений $\varphi_2(M, t)$ и $\psi(M, t)$.

Введем обозначения:

$$g_1(M^1, t) = -\sigma_{nn}^{(1)}(M^1, t), \quad g_2(M^1, t) = -\sigma_{ne}^{(1)}(M^1, t).$$

С учетом их граничные условия (8) представляются следующим образом:

$$\sigma_{nn}^{(2)}(M^1, t) = g_1(M^1, t), \; \sigma_{ne}^{(2)}(M^1, t) = g_2(M^1, t) \qquad (M^1 \in C) \tag{9}$$

Подставив (7) в выражение для вектора смещения

$$\vec{v} = grad\varphi + rot\vec{\psi}, \tag{10}$$

получаем

$$\vec{v} = grad\varphi_1 + grad\varphi_2 + rot\vec{\psi}. \tag{11}$$

Положим

$$\vec{v}_1 = grad\varphi_1, \qquad \vec{v}_2 = grad\varphi_2 + rot\vec{\psi}\,. \tag{12}$$

На основании (11) и (12) имеем

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \tag{13}$$

Вектор $\vec{v}_1$ - это, очевидно, вектор смещения, обусловленный потенциалом смещений $\varphi_1(M,t)$, введенным выше рассмотрение, а $\vec{v}_2$ - вектор смещения, обусловленный потенциалами смещений $\varphi_2(M,t)$ и $\vec{\psi}(M,t)$.

Вектор $\vec{v}_1$ и тем самым, функция $\varphi_1(M,t)$ согласно приведенной выше постановке задачи являются известными величинами.

Проекции вектора $\vec{v}_2$ на оси Ox, Oy, Oz обозначим через u, v, w соответственно. Причем, очевидно, в рассматриваемом плоском случае $v \equiv 0$. Согласно закону Гука компоненты напряжения $\sigma_{zz}^{(2)}$, $\sigma_{zx}^{(2)}$, обусловленные слагаемым $\vec{v}_2$ в (13), представляются в виде:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{14}$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]. \tag{15}$$

Для u, v согласно второму из соотношений (12), принимая во внимание, что, как установлено выше, $\vec{\psi} = -\psi_{\vec{j}}$, где $\vec{j}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси Oy, имеем:

$$u = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{16}$$

Подставляя формулы (16) в (14) и (15), получаем:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \lambda\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - 2\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \tag{17}$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \mu\left[2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]. \tag{18}$$

В указанной выше локальной системе координат $Oxyz$ при совпадении точки M^1 контура C с началом координат O, очевидно имеем

$$\sigma_{nn}^{(2)}(0,t) = \sigma_{zz}^{(2)}(0,t), \qquad \sigma_{ne}^{(2)}(0,t) = \sigma_{xz}^{(2)}(0,t).$$

Поэтому в этой системе координат граничные условия (19) на основании (17), (18) можно представить в виде:

$$\lambda \lim_{M\to 0}\frac{\partial^2 \varphi_2(M,t)}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\lim_{M\to 0}\frac{\partial^2 \varphi_2(M\ ,t)}{\partial z^2} - 2\mu \lim_{M\to 0}\frac{\partial^2 \psi(M,t)}{\partial x \partial z} = g_1(0,t)\ , \tag{19}$$

$$\mu\left[2\lim_{M\to 0}\frac{\partial^2 \varphi_2(M,t)}{\partial x \partial z} + \lim_{M\to 0}\frac{\partial^2 \psi\ (M,t)}{\partial z^2} - \lim_{M\to 0}\frac{\partial^2 \psi(M,t)}{\partial x^2}\right] = g_2(0,t), \tag{20}$$

Таким образом рассматриваемая краевая задача сводятся к определению решений $\varphi_2(M,t)$, $\psi\ (M,t)$ волновых уравнений (2), (5), соответственно, удовлетворяющих совместно граничным условиям (19), (20) во всех локальных системах координат, введенных выше в рассмотрение.

Литература:

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. -М: Высшая школа, 1971.-288 с.
2. Шамгунов Ш. Д. Предельные соотношения для частных производных волнового потенциала простого слоя и их приложения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 21- Фрунзе: Илим, 1988.-с 281-290.

Рецензент: к.ф.-м.н, доцент Мекенбаев Б.Т.