Жусупбекова С.Т.

ЧЕТКИ КАТМАР ТЕОРИЯСЫНЫН КОЛДОНМО КӨЗ КАРАШТАРЫ

Жусупбекова С.Т.

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

S.T. Zhusupbekova

APPLIED ASPECTS OF THE THEORY OF BOUNDARY LAYER

УДК: 532.546

Массанын ылдамданууга болгон көбөйтүндүсү, ошол массага сырттан таасир эткен бардык күчтөрдүн суммасына барабар деген классикалык механиканын закондоруна негиздеп четки катмар теориясынын негизги теңдемелерин анализдеп изилдөө макаланын максаты болуп эсептелет. Суюктуктун кысылуучулук жана кысылбоочулук кыймылы менен байланышкан маселелерди изилдөөдө, суюктуктун жана газдардын механикасынын негизин түзүүчү Навье-Стокстун теңдемеси колдонулат.

Целью статьи является анализ изучения основных уравнений теории пограничного слоя, основанные на законах классической механики, согласно которым масса, умноженная на ускорение, равна сумме всех внешних сил, действующих на рассматриваемую массу. При исследовании задач, связанных с движением сжимаемой и несжимаемой жидкости, используют уравнения Навье-Стокса, составляющие основу механики жидкости и газа.

The aim of the article is the analysis of the basic equations of the boundary layer theory based on the laws of classical mechanics, according to which the mass times acceleration is equal to the sum of all external forces acting on a given mass. In the study of problems connected with the motion of compressible and incompressible fluid, using the Navier-Stokes equations that form the basis of fluid mechanics

В конце 19-го столетия наука о движении жидкости распалась на две ветви: теоретическая гидродинамика, исходившая из уравнений, составленных Эйлером для движения жидкости без трения и теория пограничного слоя, основанная на уравнениях Навье - Стокса. Уже в 1904 году Прандтль, исходя из теоретических соображений и некоторых простых экспериментов, показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела, где трение играет существенную роль (пограничный слой), и на область вне этого слоя, где трением можно пренебречь. Эта гипотеза позволила дать очень наглядное физическое объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а также дала возможность преодолеть математические трудности, и открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением.

Ниже приведены основные уравнения теории пограничного слоя, основанные на законах классической механики, согласно которым масса, умноженная на ускорение, равна сумме всех внешних сил, действующих на рассматриваемую массу. При исследовании задач, связанных с движением сжимаемой и несжимаемой жидкости, используют уравнения Навье - Стокса, составляющие основу всей механики жидкости и газа, суть которой состоит в следующем [1] – [2].

В общем случае трехмерного движения поле течения определяется во первых, вектором скорости, во-вторых давлением, и в-третьих - плотностью. Для определения этих пяти величин в нашем распоряжении имеются уравнение неразрывности (закон сохранения массы), три уравнения движения (закон сохранения импульса) и уравнение термодинамического состояния. Следовательно, всего пять уравнений (если уравнение содержит также температуру, то она является еще одной переменной и к указанным пяти уравнениям следует присоединить еще одно уравнение, а именно уравнение энергии, выраженное в форме первого начала термодинамики).

Таким образом, в дифференциальной форме уравнения Навье - Стокса можно получить в следующем виде (для сжимаемой жидкости):

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} div\vec{W}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} div\vec{W}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

К этим уравнениям следует присоединить еще уравнение неразрывности, которое в раскрытой форме имеет для течений сжимаемой жидкости следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Однако, для исследования течений сжимаемой жидкости уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности недостаточно. В самом деле, изменения давления и плотности, происходящие в сжимаемых течениях, влекут за собой изменения температуры, что приводит к необходимости ввести в рассмотрение некоторые термодинамические соотношения. Первым таким соотношением является уравнение состояния, связывающее между собой давление, плотность и температуру.

Для идеального газа уравнение состояния, как известно, имеет вид:

$$\mathrm{P} - \rho R T = 0 \qquad (1.3)$$

где R - есть газовая постоянная, а T - абсолютная температура.

Далее, когда изменение состояния происходит неизотермически, тогда необходимо использовать еще одно термодинамическое соотношение уравнение энергии, которое выражает баланс теплоты и механической энергии, (первое начало термодинамики) и представляет собой дифференциальное уравнение для распределения температуры.

И, наконец, необходимое последнее соотношение. Речь идет об эмпирическом соотношении между коэффициентом вязкости и температурой.

Прежде чем привести эти два соотношения, следует отметить следующее: предположим, что тело помещено в поток жидкости и нагрето так, что его температура остается все время выше температуры жидкости. Если скорость течения более или менее велика, тогда повышение температуры, вызываемое нагретым телом, будет происходить внутри тонкого слоя в непосредственной близости от тела и процесс выравнивания температур между нагретым телом и более холодной окружающей средой будет также происходить в этом тонком слое, т.е. внутри пограничного слоя. Очевидно, что в процессе такого выравнивания температур гидродинамические явления и явление теплопроводности оказывают друг на друга сильное влияние. Поэтому необходимо уравнение теплового баланса присоединить к гидродинамическим уравнениям движения. В сжимаемой жидкости тепловой баланс движущейся частицы определяется ее внутренней энергией, теплопроводностью, конвекцией тепла посредством течения и возникновением тепла вследствие внутреннего трения, а также работой расширения (или сжатия) при изменении объема.

На основании этих процессов составленное уравнение теплового баланса имеет следующий вид:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \mu\Phi \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) носит название уравнения энергии. Данное уравнение составлено при постоянном коэффициенте теплопроводности; в этом уравнении функция Ф называется диссипативной функцией и выражается в форме:

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

И в заключении, приведем известный эмпирический закон между вязкостью и температурой, который можно выразить в следующей форме:

$$\mu = \mathbf{b}\boldsymbol{\mu}_0 \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T}_0} \qquad (1.5)$$

Данное соотношение выражает зависимость динамической вязкости воздуха от температуры, μ_0– коэффициент вязкости при начальной абсолютной температуре, b- произвольная постоянная.

Таким образом, если массовые силы x, y, z рассматривать как заданные, тогда мы имеем семь уравнений (1.1) - (1.5) для определения семи величин U, V, W, T, P, μ, ρ.

В случае неизотермического изменения состояния вместо семи уравнений остаются только пять уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) для определения пяти неизвестных величин U, V, W, P, ρ. Для несжимаемых течений (где ρ = const) выше перечисленная система уравнений значительно упрощается. Например, уравнение неразрывности (1.2) получает более простой вид:

$$\mathrm{Div}\,\vec{W} = 0$$

Поскольку в несжимаемых течениях разности температур в общем случае малы, коэффициент вязкости можно рассматривать как постоянную величину и поэтому уравнение состояния (1.3) и уравнение энергии, а также закон, связывающий коэффициент вязкости с температурой, становятся ненужными для расчета поля течения. Следовательно, этот расчет может производится независимо от термодинамических уравнений. В результате уравнение неразрывности (1.2) и уравнение движения (1.1) сильно упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \mathrm{X} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$

$$= \mathrm{Y} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (1.7)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=$$

$$=Z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Итак, если массовые силы рассматривать как заданные, тогда остаются четыре неизвестные величины U, V, W, P и для их определения имеем четыре уравнения (1.6) и (1.7). Однако, необходимо отметить, что до настоящего времени вследствие больших математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье - Стокса в их полном виде, т.е. с сохранением всех конвективных членов и всех, учитывающих вязкость. Но вместе с тем, имеются некоторые частные решения, например, для ламинарного течения в трубе или для течения в пограничном слое и эти частные решения столь хорошо совпадают с экспериментальными результатами, что вряд ли можно сомневаться в общей применимости уравнений Навье - Стокса. Следует отметить, что уравнения Навье - Стокса отличаются от уравнений Эйлера для движения жидкости без трения членом $\mu\Delta W$ учитывающего вязкость.

При решении системы уравнений теории пограничного слоя для какой- нибудь конкретной задачи необходимо учесть начальные и граничные условия данной задачи. Начальные условия формируются для случая вязкой жидкости также, как и для случая идеальной жидкости. Они сводятся к тому, что если движение является неустановившимся, то для некоторого момента времени, принимаемого за начальный, задаются скорости, давление, температуры и плотности как функции координат. Существенные отличия от идеальной жидкости имеют место при формулировке граничных условий. В теории идеальной жидкости допускается, что жидкость скользит по поверхности обтекаемого тела с некоторой конечной относительной скоростью. Если же твердое тело обтекается вязкой жидкостью, то по современным воззрениям и опытным данным, частицы жидкости прилипают к поверхности тела, и следовательно, не только нормальные, но и касательные составляющие векторов скорости жидкости и тела должны быть одинаковыми в точках на поверхности тела. Обозначив скорость жидкости в данной точке через V, а скорость тела – через U, можно записать граничное условие для задач, относящихся к вязкой жидкости, в виде равенства:

$$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{u}}$$

Последнее граничное условие весьма затрудняет решения задач, относящихся к движению вязкой жидкости. Оно вносит гораздо большие осложнения, нежели добавочные члены в уравнениях Навье - Стокса. Можно думать, что именно вследствие трудностей, сопряженных с необходимостью удовлетворить это дополнительное граничное условие, до сих пор имеется чрезвычайно мало точных решений уравнений Навье - Стокса.

Литература:

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - Москва, «Иностранная литература», 1960 г.
2. Ван -Дайк М. Методы возмущений в механике. - Москва, «Мир», 1967 г.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Бийбосунов Б.И.