

*Абжапарова Д.А.*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ  
В СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ГАУССА**

*D.A. Abzharova*

**MATHEMATICAL PROCESSING OF ENGINEERING AND GEODETIC NETWORKS  
IN A STEREOGRAPHIC PROJECTION OF GAUSS**

УДК: 528

*В данной статье рассматривается математическая обработка инженерно-геодезических сетей в стереографической проекции Гаусса. Анализируются и классический метод – цилиндрическая проекция и новый – стереографические методы построения геодезической сети.*

*This article discusses the mathematical treatment of engineering-geodetic networks in the stereographic projection of the Gauss. Analyzed and compiled the classic method - cylindrical projection and the new - stereographic methods for constructing geodetic network.*

Выбор и разработка геодезических проекции и системы координат для инженерно-геодезических работ в настоящее время является важной и актуальной проблемой инженерной геодезии, и представляет практический интерес. В своих исследованиях И.Ф.Куштин, В.И. Куштин (Россия) [3] в В.Н. Зенин (Кыргызская Республика) [4] внесли большой вклад в решении этих проблем. Однако в выше указанных работах слабо решены вопросы выбора и разработки геодезической проекции для создания городских геодезических сетей.

Целью настоящей работы является выбор и разработка специальной городской геодезической проекции и сети для инженерно - геодезических работ в Кыргызской Республике.

Для научного обоснования и сравнительной оценки достоинства стереографической проекции Гаусса, дадим математическую обработку одной и той же городской геодезической сети (рис. 1)

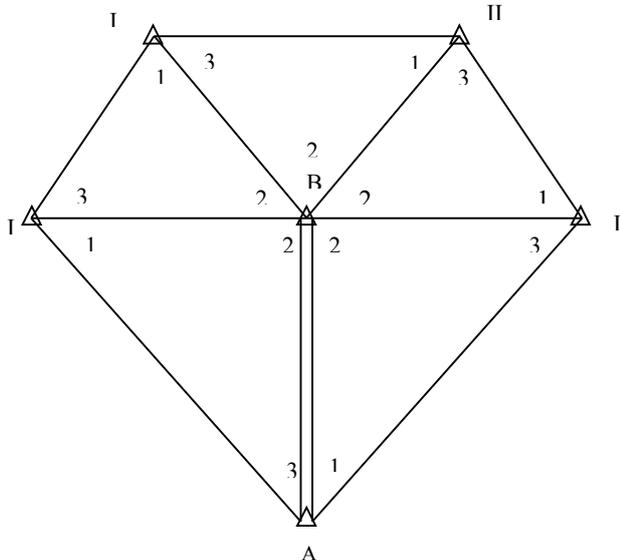


Рис. 1

в выше указанной системе, а также широко распространенной цилиндрической проекции [1,2].

Сеть, представленная на рис. 1, является центральной системой из пяти треугольников.

Сторона АВ сети измерена электронным тахеометром TC802 швейцарской фирмы “Лейка” с относительной точностью 1:200000 и одновременно является стороной государственной триангуляции 3-го класса.

Исходными данными сети триангуляции являются:

а) координаты пункта А

$$x_A = 6107563,81 м$$

$$y_A = 5571684,52 м$$

длина стороны АВ

$$S_{AB} = 6113,21 м$$

и её направление в проекции Гаусса - Крюгера

$$\alpha_{AB} = 320^{\circ}47'28,1''$$

б) измеренные углы сети на эллипсоидной поверхности табл. 1

Таблица 1

Название пункта	Измеренные углы
I	60°57'57,7"
B	69°27'44,8"
A	49°34'17,6"
II	56°33'40,7"
B	73°48'18,9"
I	49°41'04,5"
IV	56°33'40,7"
B	69°34'30,2"
III	53°35'04,3"
A	37°58'23,8"
B	94°28'47,0"
IV	47°32'51,3"
A	58°38'43,9"
B	52°43'39,1"
IV	68°37'38,5"

Получим исходные данные в оптимальной стереографической проекции Гаусса по соответствующим элементам в системе координат Гаусса – Крюгера. Эти задачи легко решаются по схеме рис. 1.

1) Примим за начало координат городской системы точку с координатами:

$$B_0 = 55^{\circ} 00' \quad x_0 = 6097337,19 м$$

$$L_0 = 27^{\circ} 00' \quad R_0 = 6395543 м$$

Тогда

$$X_{г.к} = X - X_A = 10226,62 м$$

$$Y_{г.к} = Y_A = +71684,52 м$$

Вычислим с помощью табл. 2 координаты исходного пункта в городской системе.

Таблица 2

Элементы формул	Пункт А (м)
X <sub>GK</sub>	10226,62
- I	- 0,31
+ II	+ 0,00
X <sub>G</sub>	10226,31
Y <sub>GK</sub>	71684,32
+ I	+ 0,04
- II	- 0,75
Y <sub>G</sub>	73683,81

Получим масштаб изображения в пункте А по формуле и результат значений запишем в таблицу (табл. 3).

$$\begin{aligned}
 m_{GK}^G &= \frac{dy_G}{dy_{GK}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dx_G^2}{dy_{GK}^2} \cdot \frac{dy_{GK}^2}{dy_G^2} \right) = \\
 &= 1 + \frac{x^2(1+2\eta_0^2)}{4N_0^2} - \frac{y^2(1+2\eta_0^2)}{4N_0^2} + \frac{3t_0\eta_0^2xy^2}{2N_0^3} - \frac{t_0\eta_0^2x^3}{2N_0^3} + \frac{x^2}{2yN_0^4} \\
 &- \frac{x^2y^2}{4N_0^4} + \frac{y^4}{24N_0^4} \left( 1 + \frac{x^2y^2}{8N_0^4} \right) = \\
 &= 1 + \frac{x_{GK}^2(1+2y^2)}{4N_0} - \frac{y_{GK}^2(1+2\eta_0^2)}{4N_0^2} + \frac{3t_0y_{GK}^2xy_{GK}^2}{2N_0^3} - \frac{t\eta^2x^3}{2N_0^3} + \frac{x_{GK}^2}{24N_0^4} \\
 &- \frac{x^2y^2}{8N_0^4}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Таблица 3

Элементы формул	Значения
I	1,0000000
+x <sub>G</sub> <sup>2</sup> : 4N <sub>0</sub> <sup>2</sup>	0,0000006
+y <sub>G</sub> <sup>2</sup> : 4N <sub>0</sub> <sup>2</sup>	0,0000315
m <sub>G</sub>	1,0000321

Найдём длину стороны в стереографической проекции по формулам (табл. 4).

Таблица 4

Элементы формулы	Значения (м)
S <sub>GK</sub>	6013,21
+S <sub>GK</sub> · x <sub>m</sub> <sup>2</sup> : 4M <sub>0</sub> <sup>2</sup>	+ 0,01
-S <sub>GK</sub> · y <sub>m</sub> <sup>2</sup> : 4M <sub>0</sub> <sup>2</sup>	- 0,18
S <sub>G</sub>	6013,04

Определим дирекционный угол исходного направления в городской системе координат по формуле.

$$\begin{aligned}
 \alpha_\sigma &= \alpha_{\sigma K} + \frac{x_m y_m \rho''}{2M_0^2} + \frac{\Delta x \Delta y \rho}{24m_0^2} \\
 \alpha_\sigma &= \alpha_{\sigma K} + \frac{x_\alpha y_\alpha \rho''}{2M_0^2} + \frac{x_\alpha \Delta y \rho''}{24m_0^2} + \frac{y_\alpha \Delta x \rho}{4m_0^2} + \frac{\Delta x \Delta y \rho''}{6m_0^2} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Результаты полученных значений запишем в таблицу (табл. 5).

Таблица 5

Элементы формулы	Значения
α <sub>GK</sub>	320° 47' 28,01"
ρx <sub>α</sub> y <sub>α</sub> : 2M <sub>0</sub> <sup>2</sup>	+ 1,85
ρx <sub>α</sub> Δy: 4M <sub>0</sub> <sup>2</sup>	- 0,05
ρy <sub>α</sub> Δx: 4M <sub>0</sub> <sup>2</sup>	+ 0,40
ρΔxΔy: 6M <sub>0</sub> <sup>2</sup>	+ 0,02
α <sub>G</sub>	320° 47' 30,30"

Дальнейшую математическую обработку геодезической сети выполним по новым исходным данным, соответствующим стереографической проекции Гаусса в городской системе координат [3,4].

Используя новые координаты пункта А, дирекционный угол α<sub>G</sub>, измеренные углы и длины сторон треугольников, полученные в таблице 1 вычислим приближённые координаты всех пунктов сети и определим поправки в направлениях за кривизну изображения геодезических линий на плоскости в стереографической проекции Гаусса по приближённым значениям координат [2,3], вычислим поправки в углы, найдем плоские углы и выполним уравнивание сети двух групповым методом [6,7].

Затем выполним окончательное решение треугольников, используя значения сторон треугольников сети и дирекционные углы, вычислим окончательные координаты в стереографической проекции Гаусса, а также выполним контроль полученных результатов.

Таблица 6

Пункты	X <sub>G</sub> (М)	y <sub>G</sub> (М)
A	10226,31	71683,81
B	14885,53	67882,72
I	10363,48	65245,08
II	16043,51	63241,47
III	19455,03	67368,91
IV	15071,80	73393,68

Как видно из таблицы 6 переход с эллипсоида на плоскость в стереографической проекции сопровождается гораздо меньшими искажениями, чем проекции Гаусса-Крюгера, в среднем в 2 раза.

Определим границы области применения проекции для сетей сгущения съёмочного обоснования.

Согласно математической обработке инженерно-геодезических сетей имеем [8].

$$S_G = 2N_0 \sqrt{\frac{\Delta S}{S}}. \tag{3}$$

Для исходной стороны триангуляции 4 класса при  $\Delta S: S = 1:100000$  получим

$$S_G = 2 \cdot 6400 \sqrt{1:100000} = 40 \text{ км.}$$

Площадь обхвата в данном случае будет

$$P = \sqrt[3]{4} \cdot 40^2 = 5000 \text{ км}^2.$$

Отсюда, если принять за начало координат в стереографической проекции какую-либо точку, расположенную на ближайшем осевом меридиане зоны под широтой изображаемого города, то на площади  $5000 \text{ км}^2$ , т.е.  $70 \times 70 \text{ км}^2$ , при относительной точности  $1:100000$ , линейными искажениями городской триангуляции можно будет пренебречь.

Для городской полигонометрии всех разрядов линейными искажениями  $1:20000$  и ниже можно пренебречь на площади [10,11].

$$P = 3,14 \cdot 80^2 = 20\,000 \text{ км}^2 = 140 \times 140 \text{ км}^2.$$

Для съёмочного обоснования, развиваемого с относительной ошибкой  $1:2000$ , можно пренебречь на площади в 1 лист масштаба  $1:1000000$ .

В таблице 7 приведены значения величины линейных искажений в стереографической проекции Гаусса для инженерно-геодезических работ в зависимости от их точности.

В расчетах длина стороны геометрического построения равна 1 км.

Поправки вычислены по формуле

$$\Delta S = 1 \text{ км} \cdot S_G^2 / 4N^2_0 \quad (4)$$

Таблица 7

Расстояние от начала координат, км	Ошибка в расстройнии на 1 км, м	Поправка на 1 км, м	Относительная ошибка
0	0	0	-
10	0	0	-
20	+0,002	-0,002	1:500000
30	+0,006	-0,006	1:160000
40	+0,010	-0,010	1:100000
50	+0,016	-0,016	1:60000
100	+0,064	-0,064	1:16000
120	+0,090	-0,090	1:11000
150	+0,140	-0,140	1:7000
200	+0,260	-0,260	1:4000
250	+0,400	-0,400	1:2500
285	+0,500	-0,500	1:2000

Полученные результаты дают возможность сделать **следующих выводов:**

1. При обработке высокоточных инженерно-геодезических сетей порядка  $1:100000$  и выше, следует учитывать результаты редукции.

2. При обработке сетей сгущения редуцирование не осуществляется по всей ширине  $3^0$  зон ( $S_G \leq 120 \text{ км}$ ).

3. При обработке съёмочного обоснования и результатов численных съёмок редукции расстояний не учитываются по всей ширине  $6^0$  зон ( $S_G < 256 \text{ км}$ ).

4. При обработке угловых измерений сетей сгущения и съёмочного обоснования редукциями направлений и углов можно пренебречь во всех случаях практики.

5. В случае использования секущей стереографической проекции Гаусса, границы использования систем координат увеличиваются в  $\sqrt{2}$  раз.

Поэтому данная проекция также целесообразна для применения её в инженерно-геодезических работах, т.к. приводит к упрощению расчетов при математической обработке обоснования и исходных данных по выносу проектов в натуру.

#### Литература:

- Христов В.К. Координаты Гаусса-Крюгера на эллипсоде вращения. - М.: Геодезиста, 1957. - 203 с.
- Болшаков В.Д. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. - М.: Недра, 1983.- 223 с.
- Куштин И.Ф., Куштин В.И. Геодезия: учебно-практической пособие- Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 909 с.
- Зенин В.Н. разработка специальной геодезической проекции для инженерных и городских геодезических работ// Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н. - М.: 1970. – 12 с.
- Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 2009. – 2 46 с.
- Бойко Е.Г. Выс.геодезия // Часть II. Сфероидическая геодезия - Картгеоцентр. - М.: Геодезиздат, 2003 - 144с.
- Огородова Л.В. Высшая геодезия // Часть III. Теоретическая геодезия. - М.: Геодезкартиздат, 2006. - 245 с.
- Яковлев Н.В. Выс.геодезия. - М.: Недра, 1989. - 445 с.
- Пеллинен Л.П. Выс. геодезия. - М.: Недра,1978.- 264 с.
- Бессель Ф.В. Высшая геодезия и способ наименьших квадратов. – М.: Геодезлитиздат, 1961. - 282 с.
- Карабцова З.М. Геодезия. - М.: Издательство Дальневосточного университета, 2002. - 153 с.

Рецензент: д.т.н., профессор Сеитов Б.М.