Дыйканова А.Т., Туганбаев У.М.

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОКОЛОЗВУКОВОГО УРАВНЕНИЯ

A.T. Dyikanova, U.M. Tuganbaev

ABOUT METHODS OF DECISION OF SUMMERISED NON-STATIONARY TRANSONIC EQUATION

УДК 533.6.011

Разработан новый метод решения одного нестационарного околозвукового уравнения.

The new method of one non-stationary transonic equation is developed.

Исследование нестационарных осесимметричных течений наиболее удобно вести, опираясь не на систему уравнений для составляющих скорости потока, а на одно нелинейного уравнение второго порядка – потенциала скоростей, полученное Линем-Рейснером-Тзяном, где равномерный поток, текущий оси симметрии с постоянной скоростью может быть представлен в виде $\varphi = a_* x$, где a_* – критическая скорость звука.

Основным фактом является то, что в приближенной теории сигналы вниз по потоку передаются с бесконечной скоростью, и у уравнения Л.Р.Т. появляются некоторые характеристические плоскости для любых решений. Поэтому задача Коши об определении движения газа в момент времени близкое к начальному, для вышеуказанного уравнение будет некорректно поставленной [3]. Чтобы уйти от этих недостатков приближенного уравнения, рассмотрим в качестве модельного уравнение и понимания основных закономерностей нестационарных явлений, другое уравнение [1]. Именно в этой работе [1], была предложена математическая модель нестационарного околозвукового течения идеального газа, которая обобщает классическое уравнение Л.Р.Т. В ней была разработана одно решение, которое описывала течение в осесимметричном сопле Лаваля с криволинейной звуковой линией. Позже автором [2] было разработано другое точное решение, в котором изменение звуковой поверхности не зависело от времени, имело одно положение остановки на оси в самом узком сечении сопла. И еще, это решение не имела произвольную постоянную интегрирования, которым можно было бы изменять кривизну самой звуковой поверхности.

Автор [1] утверждает, что предлагаемое им дифференциальное уравнение, описывающее нестационарное околозвуковое течение газа, сохраняет тип точного уравнения для потенциала скоростей, отсутствуют недостатки осесимметричного уравнения Л.Р.Т., скорость распространения во всех направлениях конечна, задача Коши корректно поставлена и отсутствуют характеристические плоскости в пространстве xrt.

Итак, рассмотрим уравнение движения осесимметричного нестационарного безвихревого течения идеального газа [1], записанного в виде

$$-\left[\varphi_x + b_0\,\varphi_t\right]\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \varphi_r/r - 2\varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0\,. \qquad (1)$$

Для данного уравнения поставим следующие начально - краевые условия:

$\varphi(x,r,0) = B_0(x,r)$ - начальное условие при t = 0, (2)

$\varphi(x,0,t) = T_0(t) + x^2 T_1(t) + \ldots$ условие на оси симметрии. (3)

I. Для решения поставленной задачи, вначале предположим, что существует обычное допущение о малости нестационарных возмущений по сравнению со стационарными т.е. $\left|\operatorname{grad}\varphi_c\right| >> \left|\operatorname{grad}\varphi_{\text{í}}\right|$. (4)

Такого рода допущения были рассмотрены в [1,4], другими словами, решение уравнения (1) можно искать в виде

$$\varphi_x\,(x,r,t) = \varphi_c\,(x,r) + \varepsilon\,\varphi_{\text{í}}\,(x,r,t), \qquad (5)$$

тогда в результате подстановки, получим следующее уравнение

$$\begin{aligned}&-[\varphi_{cx} + \varepsilon\varphi_{\text{íx}} + \varepsilon b_0\,\varphi_{\text{ít}}](\varphi_{cxx} + \varepsilon\varphi_{\text{íxx}}) + \varphi_{crr} + \varepsilon\varphi_{\text{íxx}} +\\ &+(\varphi_{cx} + \varepsilon\varphi_{\text{íx}})/r - 2\varepsilon\varphi_{\text{íxt}} - \varepsilon\varphi_{\text{ítt}} = 0.\end{aligned} \qquad (6)$$

Последнее уравнение записывается в виде системы уравнений

$$-\varphi_{cx}\varphi_{\text{ñxx}} + \varphi_{crr} + \varphi_{cr}/r = 0, \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}&-\varphi_{cx}\varphi_{\text{íxx}} + \varphi_{\text{írr}} + \varphi_{\text{ír}}/r - 2\varphi_{\text{íxt}} - \varphi_{\text{ítt}} -\\ &- \varphi_{cxx}(\varphi_{\text{íx}} + b_0\varphi_{\text{ít}}) = 0,\end{aligned} \qquad (8)$$

$$(\varphi_{\text{íx}} + b_0\,\varphi_{\text{ít}})\,\varphi_{\text{íxx}} = 0\,. \qquad (9)$$

Уравнение (7) является классическим уравнением Кармана для осесим-метричного потока, которое имеет следующее решение [2]

$$\varphi_c(x,r,t) = ax^2 + a^2xr^2 + a^3r^4/8 \qquad (10)$$

Это решение известно, оно описывает течение в сопле Лаваля с криволинейной звуковой поверхностью, которая обращена в сторону набегающего потока. Из уравнения (9) можно определить звуковую поверхность для нестационарного потока.

Подставляя последнее решение в уравнение (8), получим

$$-(2ax+a^2r^2)\varphi_{íxx}+\varphi_{írr}+\varphi_{ír}/r-2\varphi_{íxt}-$$
$$-\varphi_{ítt}-2a(\varphi_{íx}+b_0\varphi_{ít})=0 \qquad (11)$$

Решение нестационарного уравнения (11) можно найти различными способами. Здесь мы применим комбинированный метод - классический метод разделения переменных и автомодельный

$$\varphi_{í}(x,r,t)=r^k f_0(\xi)T(t), \qquad \xi=xr^{-2}, \qquad (12)$$

где ξ-автомодельная переменная, k–показатель, T(t)–пока неизвестная функция.

Определяя все необходимые частные производные, подставляя в уравнение (11) и сокращая на $T(t)=e^{\alpha t}$, $\text{ãäå}\quad \alpha=-2a\bar{b}_0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(4\xi^2-2\,\text{à}\xi-\text{à}^2)f_0''(\xi)+[4(1-k)\,\xi+$$
$$+2a(2\bar{b}_0-1)]f_0'(\xi)+k^2f_0(\xi)=0. \qquad (13)$$

Это уравнение также можно решить различными способами, опираясь на произвольность коэффициента k. Поступим следующим образом. Введем новую переменную вида

$$z=n\xi+an((1\pm\sqrt{5})/4) \qquad (14)$$

и другую функцию, в результате, которого получим гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$z(1-z)f_1''(z)+2[(k+1-4b_0)/\sqrt{5}+$$
$$+(1-k)-2(1-k)z]f_0'(z)-n^2f_1(z)=0, \qquad (15)$$

где двумя его линейно-независимыми решениями будут [5]

$$f_1(z)=c_1F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)+c_2z^{1-\gamma}F_2(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;z) \qquad (16)$$

а коэффициенты α, β, γ известны, они зависят от k, n. Гипергеометрические уравнения Гаусса хорошо изучены т.е. другими словами, частные решения (16) могут быть записаны в различных видах полиномов, укладывающихся в различных классах.

Далее зная, что потенциал скорости нестационарного потока меньше стационарного, поэтому его решение можно искать в форме

$$\varphi_{í}(x,r,t)=(b_0x^3+b_1x^2r^2+b_2xr^4+b_3r^6)T(t) \qquad (17)$$

Здесь также определяя все необходимые частные производные и подставляя в уравнение (10) получим следующее уравнение

$$-(2ax+a^2r^2)(6b_0x+2b_1r^2)T+$$
$$+(2b_1x^2+12b_2xr^2+30b_3r^4)T-(6b_0x^2+4b_1xr^2-$$
$$+2b_2r^4)T'-(b_0x^3+b_1x^2r^2+b_2xr^4+b_3r^4)T''-$$
$$-2a[(3b_0x^2+2b_1xr^2+b_2r^4)T+$$
$$+\bar{b}_0(b_0x^3+b_1x^2r^2+b_2xr^4+b_3r^6)]T'=0 \qquad (18)$$

или, после некоторых простых математических преобразований, имеем

$$-[12ab_0x^2+(4ab_1+6b_0a^2)xr^2+2a^2b_1r^4]+$$
$$+(4b_1x^2+16b_2xr^2+30b_3r^4)-$$
$$-\alpha(6b_0x^2+4b_1xr^2+2b_2r^4)-$$
$$-\alpha^2(b_0x^3+b_1x^2r^2+b_2xr^4+b_3r^6)-$$
$$-(3b_0x^2+2b_1xr^2+b_2r^4)2a-2a\bar{b}_0\alpha(b_0x^2+$$
$$+b_1x^2r^2+b_2xr^4+b^3r^6)=0. \qquad (19)$$

Собирая члены при одинаковых степенях переменных x^2, xr^2, r^4, имеем следующую систему, при этом имя в виду, что

$$T(t)=e^{\alpha t},\ \text{ãäå}\quad \alpha=-2a\bar{b}_0:$$
$$9ab_0-2b_1+3\alpha b_0=0,$$
$$4ab_1+3b_0a^2-8b_2+2\,\alpha b_1=0,$$
$$a^2b_1-18b_3+b_2\alpha+ab_2=0.$$

Из последней системы, определяем необходимые постоянные

$$b_0-\text{ïðîèçâîë.},\qquad b_1=[3ab_0/2](3-2\bar{b}_0),$$
$$b_2=[a^2b_0/8](21+6\bar{b}_0-12\bar{b}_0^2),$$
$$b_3=[2a^3b_0/3](6-5\bar{b}_0-2\bar{b}_0^2+2\bar{b}_0^3).$$

Таким образом, с учетом решений (10,17), наше решение записывается так

$$\varphi(x,r,t)=ax^2+a^2xr^2+a^3r^4/8+\varepsilon[b_0x^3+$$
$$+b_1x^2r^2+b_2xr^4+b_3r^6]\,exp(-2a\bar{b}_0t). \qquad (20)$$

Анализ полученного решения (20), подтверждает наше утверждение о последовательности нестационарных и стационарных течений. Действительно, при $\varepsilon\to 0$ èëè $t\to\infty$ получаем стационарное течение в осесимметричном сопле с криволинейной звуковой поверхностью, обращенной навстречу набегающемуся потоку.

II. Рассматривая второе случай, а именно, если $\varepsilon\to 1$ т.е. считая, что размерность нестационарного и стационарного потоков одинакова, получаем другие решения.

Снова обращаясь к уравнению (6) и предполагая, что нестационарный поток может быть представлен как

$$\varphi_H(x,r,t)=cx^2+P_1(r,t)x+P_2(r,t), \qquad (21)$$

получаем уравнение в частных производных, которое может иметь решение, если будет решена следующая система

$$P_{1rr}+P_{1r}/r-P_{1tt}-2(a+c)b_0P_{1t}=4c(c+2a), \quad (22)$$

$$P_{2rr}+P_{2r}/r-P_{2tt}-2(a+c)b_0P_{2t}=2[P_{1r}+(a+c)P_1+a^2cr^2]. \quad (23)$$

Уравнение (22) может быть решено в форме

$$P_1(r,t)=\tilde{n}(2a+\tilde{n})b_0r^2+c_1e^{\lambda t}+c_2\,, \quad (24)$$

а с его учетом уравнение (23) принимает вид

$$P_{2rr}+P_{2r}/r-P_{2tt}-2(a+c)b_0P_{2t}=2[c_1(\lambda+a+c)e^{\lambda t}+ \\ +(3a^2+3ac+c^2)br^2+(a+c)c_2]. \quad (25)$$

Последнее уравнение может быть записано как

$$P_2(r,t)=b_2r^4+b_3r^2+T_2(t), \quad (26)$$

ãäå $\lambda=-2(a+c)b_0$, $b_2=(3a^2+3ac+c^2)b/8$, $b_3=(a+c)c_2/2$.

А относительно функции $T_2(t)$, получим следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T_2''(t)+2b_0(c+a)T_2'(t)=-2c_1(\lambda+a+c)e^{\lambda t}- \\ -2c_1(a+c)(1-2b_0), \quad (27)$$

определение общего и частного его решений не составляет особых трудностей

$$T_2(t)=\tilde{n}_2e^{\lambda_1 t}+c_3e^{\lambda_2 t}, \quad (28)$$

другими словами определили и вторую функцию, записанную в виде

$$P_2(r,t)=b_2r^4+b_3r^2+\tilde{n}_4\exp[-4b_0(a+c)t]. \quad (36)$$

Таким образом, общее решение для нестационарного околозвукового течения записываются как

$$\varphi_H(x,r,t)=cx^2+[\tilde{n}(2a+\tilde{n})b_0r^2+c_1e^{\lambda t}+c_2]\,x+ \\ +b_2r^4+b_3r^2+\tilde{n}_4\exp[-4b_0(a+c)t]. \quad (37)$$

III. Зная, что стационарная часть решения имеет вид (10), будем искать решение нестационарной части как

$$\varphi_H(x,r,t)=r^4F_0(t)+r^2F_1(x,t)+F_2(x,t)\,, \quad (38)$$

в этом случае само уравнение (8) запишется в виде

$$-(2\,\grave{a}x+\grave{a}^2r^2)(r^2F_{1xx}+F_{2xx})+16r^2F_0+4F_1- \\ -r^2F_{1xt}-F_{2xt}-2r^4F_{0tt}-2r^2F_{1tt}-2F_{2tt}-2a[b_0r^4F_{0t}+ \\ +r^2(F_{1x}+b_0F_{1t})+(F_{2x}+b_0F_{2t})]=0. \quad (39)$$

Последнее уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда искомые функции $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$ записываются как

$$F_1(x,\,t)=xT_1(t), \quad (40)$$

$$F_2(x,t)=d_0(t)x^2+d_1(t)x+d_2(t). \quad (41)$$

Действительно, определяя все необходимые частные производные и подставляя в уравнение (39), имеем следующее дифференциальное соотношение

$$-(2\,\grave{a}x+\grave{a}^2r^2)d_0(t)+16r^2F_0(t)+4xT_1(t)- \\ -r^2T_1'(t)-[2xd_0'(t)+d_1'(t)]-2r^4F_0''(t)- \\ -2xr^2T_1''(t)-2[d_0''(t)x^2+d_1'(t)x+d_2''(t)]- \\ -2a[r^2T_1(t)+2xd_0(t)+d_1(t)+b_0r^4F_0'(t)+b_0xr2T_1'(t) \\ +b_0x^2d_0'(t)+b_0xd_1'(t)+b_0d_2'(t)]=0 \quad (42)$$

Данное дифференциальное соотношение будет решено, если будет решена следующая система дифференциальных уравнений

1. $2T_1(t)-d_0'(t)-3ad_0(t)=0;$
2. $16F_0(t)-T_1'(t)-2aT_1(t)-a^2d_0(t)=0;$
3. $F_0''(t)+ab_0F_0'(t)=0;$
4. $2d_2''(t)+2ab_0d_2'(t)+d_1'(t)+2ad_1(t)=0;$ (43)
5. $T_1''(t)+ab_0T_1'(t)=0;$
6. $d_0''(t)+2ab_0d_0'(t)=0.$

Разрешая эту систему, определим все необходимые искомые функции

$$d_0(t)=p_1e^{\alpha t}+c_1,$$

$$d_1(t)=p_5e^{-2\alpha 2}+c_5, \qquad d_2(t)=p_4e^{\alpha t}+c_4,$$

$$F_0(t)=p_3e^{\alpha t}+c_3, \qquad T_1(t)=p_2e^{\alpha t}+c_2, \quad (44)$$

где $\alpha=-ab_0$, $c_2=\dfrac{3ac_1}{2}$, $c_3=\dfrac{a^2c_1}{8}$,

$$p_2=\frac{a(3-b_0)p_1}{2}, \qquad p_3=\frac{a^2(8+b_0-b_0^2)p_1}{32}.$$

p_1,p_4,p_5,c_1,c_4,c_5 – произвольные постоянные.

Итак, решение для нестационарной части найдено в виде (21), а искомые функции приняли вид (24,26,44).

Таким образом, для решения обобщенного уравнения, предложенного в [1], разработаны два вида его решения, а именно в виде суммы двух слагаемых – стационарного и нестационарного. Размерность этих слагаемых в первом случае считается неодинаковым, во втором они одинаковы. Полученные решения в обоих случаях, описывают нестационарные течения в осесимметричных соплах с криволинейной звуковой поверхностью. При $t \to \infty$, полученные решения совпадают с решениями других авторов для стационарного потока.

Список литературы

1. Севостьянов.Г.Д. Особенности стационарных околозвуковых течений с криволинейным скачком. Аэродинамика. – Саратов,1988.-№11.-С.88-94.
2. Туганбаев У.М. Мейеровское течение в сопле для нестационарного потока газа. Сб. науч. трудов КГПУ им. И.Арабаева, вып.IV, Бишкек, 2000 –С.200-203.
3. Рыжов О.С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1965.- 237с.
4. Вельмисов П.А. Об одном классе нелинейных потенциальных течений газа. Международная конференция по логике, информатике, науковедению.- Ульяновск, 2007. – т.4. –С.81-86.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. – 576с.

Рецензент: д.ф.-м.н. Сулайманова С.М.