

Каденова З.А., Орозмаматова Ж. Ш.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Z.A. Kadenova, Zh.Sh. Orozmatova

ABOUT ONE CLASS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF FREDGOLM OF THE FIRST KIND WITH IN UNLIMITED AREAS

УДК 517.968

В данной статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности в одном классе для линейных интегральных уравнений первого рода Фредгольма в неограниченных областях.

In this article on the basis of a method of non-negative square forms uniqueness theorems in one class for the linear integral equations of the first kind of Fredholm in unlimited areas are proved.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^{\infty} K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a, \infty], \quad (1)$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} A(t, s), & a \leq s \leq t \leq \infty, \\ B(t, s), & a \leq t \leq s \leq \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается, что $A(t, s), B(t, s)u f(t)$ данные функции, $u(t)$ – искомая функция.

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, ранее изучались частности в [1]-[5], где были получены теоремы единственности, устойчивости и регуляризации. В данном случае, доказывали единственность решения уравнения (1), в пространстве $L_2[a, \infty]$.

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t, s)u(s)ds + \int_t^{\infty} B(t, s)u(s)ds = f(t). \quad (3)$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t , получим

$$\int_a^{\infty} \int_a^t A(t, s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^{\infty} \int_t^{\infty} B(t, s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^{\infty} f(t)u(t)dt. \quad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^{\infty} \int_a^t A(t, s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^{\infty} \int_a^s B(t, s)u(s)u(t)dt ds = \int_a^{\infty} f(t)u(t)dt,$$

т.е.

$$\int_a^{\infty} \int_a^t [A(t, s) + B(s, t)]u(s)u(t)dsdt = \int_a^{\infty} f(t)u(t)dt.$$

Обозначим

$$H(t, s) = \frac{1}{2} [A(t, s) + B(s, t)].$$

Тогда

$$2 \int_a^t \int_a^t H(t,s) u(s) u(t) ds dt = \int_a^t f(t) u(t) dt. \quad (5)$$

Ниже предполагаем, что ядро $H(t,s)$ интегрируемо с квадратом по области $a \leq t, s \leq b$ т.е. подчинено условию

$$\int_a^b \int_a^t H^2(t,s) dt ds = B^2 < +\infty. \quad (6)$$

Введём новую функцию $M(t,s)$ следующим образом

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \leq s \leq t \leq \infty; \\ H(s,t), & a \leq t \leq s \leq \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Ясно, что

$$M(t,s) = M(s,t).$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_a^b \int_a^b |M(t,s)|^2 ds dt = 2B^2 < \infty.$$

Тогда, известно, что

$$M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t) \varphi_i(s)}{\lambda_i}, \quad (8)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ – соответствующие ортонормированные собственные функции.

Теорема. Пусть $M(t,s)$ - полное ядро и $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $L_2[a, \infty]$ единственно.

Доказательство. Пусть уравнение (1) при $f(t) \equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t) \in L_2[a, \infty]$ т.е.

$$\int_a^{\infty} K(t,s) u(s) ds = f(t) \equiv 0, \quad \text{почти при всех } t \in [a, \infty].$$

Отсюда

$$2 \int_a^{\infty} \int_a^t H(t,s) u(s) u(t) ds dt = 0. \quad (9)$$

Учитывая (6), (7) и (8) из (9) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_i} \int_a^{\infty} \varphi_i(t) u(t) \int_a^t \varphi_i(s) u(s) ds dt = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_a^{\infty} \varphi_i(t) u(t) dt \right|^2 = 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\int_a^{\infty} \varphi_i(t) u(t) dt = 0, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Следовательно, $u(t) = 0$. Теорема доказана.

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. с. 1052-1055.
4. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.
5. Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables- Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia- 2013, №3- С. 30-36.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Асанов А.
