Известия вузов № 2, 2013

МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТЕХНОЛОГИЯ

Карасаев И.К.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ И НОРМАЛИЗАЦИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

I. K. Karasaev

POLARIZATION AND NORMALIZATION OF INFINITE MATRICES

УДК 517.956 (575.2)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+q_1(t)\frac{dy}{dt}+q_0(t)y=0, \qquad (1)$$

где $q(t)\ (k=1,2)$ – непрерывны и $q_k(t+2\pi)=q_k(t)(k=1,2)$.

Особо отметим, что случай, когда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a(t)dt=0, \qquad (2)$$

и (1) представимо в виде $[39, \tilde{n}.634]$

$$\ddot{x}+a(t)\cdot x=0. \qquad (3)$$

где
$$a(t)=q_0(t)-\frac{1}{4}q^2{}_1(t)-\frac{1}{2}\dot{q}_1(t) \qquad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Динамическую систему, описываемую уравнением (1) будем называть полной .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Динамическую систему, описываемую уравнением (3), где $a(t)$ определяется равенством (4), будем называть неполной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функцию $a(t)$, определяемую равенством (4), будем называть **коэффициентом неполной динамической** системы.

Случай (2), вызывает большую трудность, т.к. в этом случае не удается поляризовать векторное уравнение

$$A_0(\mu)\,\vec{z}=0, \qquad (5)$$

где $\vec{z}=(\ldots,z_{-2,}z_{-1,}z_0,z_1,z_2,\ldots)$ - неизвестный вектор.

Матрица в векторном уравнения имеет вид $(a_0=0)$:

$$A_0(\mu)=\begin{pmatrix}(\mu-2i)^2 & a_{-2+1} & a_{-2+0} & a_{-2-1} & a_{-2-2}\\ a_{-1+2} & (\mu-i)^2 & a_{-1+0} & a_{-1-1} & a_{-1-2}\\ a_{0+2} & a_{0+1} & (\mu+0i)^2 & a_{0-1} & a_{0-2}\\ a_{1+2} & a_{1+1} & a_{1+0} & (\mu+i)^2 & a_{1-2}\\ a_{2+2} & a_{2+1} & a_{2+0} & a_{2-1} & (\mu+2i)^2\end{pmatrix} \qquad (6)$$

На характеристические показатели наложим условие

$$(\mu+ip)^2-\alpha\neq 0, \quad (p=0,\pm1,\pm2,\ldots) \qquad (7)$$

где μ принадлежит бесконечной полосе (8), $\alpha-$ произвольное комплексное число, отличное от нуля, также принадлежит области G:

$$G:\begin{cases}-\frac{1}{2}\leq \operatorname{Im}\mu\leq\frac{1}{2},\\ -\infty<\operatorname{Re}\mu<+\infty,\end{cases} \qquad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.Условие (7) будем называть **условием поляризации характеристических показателей,** α будем называть **носителем поля ризации.**

$$A_0(\mu) = \left\| \left[A_0(\mu) \right]_{pq} \right\|_{-\infty}^{\infty},$$

$\left[A_0(\mu)\right]_{pq} = (\mu + ip)^2 \delta_{pq} + a_{p-q}$ – элемент, находящийся на пересечении p-ой строки q-го столбца, δ_{pq} – символ Кронекера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.Диагональную матрицу

$$\lambda_1(\mu) = diag\left[\ldots, \frac{1}{(\mu-2i)^2}, \frac{1}{(\mu-i)^2}, \frac{1}{(\mu-0i)^2}, \frac{1}{(\mu+i)^2}, \frac{1}{(\mu+2i)^2}, \ldots\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \frac{1}{(\mu-2i)^2} & & & & & \\ & & \frac{1}{(\mu-i)^2} & & & & \\ & & & \frac{1}{(\mu-0i)^2} & & & \\ & & & & \frac{1}{(\mu+i)^2} & & \\ & & & & & \frac{1}{(\mu+2i)^2} & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

будем называть **дробной поляризующей матрицей (множителем) нулевым носителем (** $\alpha = 0$).

Действуя слева **поляризующей матрицей** $\lambda(\mu)$ на векторное уравнение (5), имеем

$$A_2(\mu)\vec{z} = \vec{0} \qquad (9)$$

где $\vec{z} = (\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \ldots)$ – неизвестный вектор.

$$A_2(\mu) = \left\| \left[A_2(\mu) \right]_{pq} \right\|_{-\infty}^{\infty}, \quad \left[A_2(\mu) \right]_{pq} = \delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2}.$$

В развернутом виде

$$A_2(\mu) = \begin{pmatrix} \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2}\cdots \\ \cdots\frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2} & 1 & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2}\cdots \\ \cdots\frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2} & 0 & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2} & \frac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2}\cdots \\ \cdots\frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2} & 1 & \frac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2}\cdots \\ \cdots\frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2} & \frac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2} & 1 \quad \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

$$\Delta_2(\mu) = \det A_2(\mu)$$

есть функция от комплексной переменной μ .

Очевидно, что

$$A_2(\mu) = \lambda(\mu) \cdot A_0(\mu).$$

Заметим,что действие **поляризующей матрицы** на уравнение (5), (матрицу $A_0(\mu)$) равносильно тому, что каждое уравнение бесконечной линейной системы (10) (каждая строка $A_0(\mu)$) умножается на соответствующий (персональный) множитель так, что получается эквивалентная бес-
конечная линейная система уравнений, где δ_{pq} - символ Кронекера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что матрица (10) имеет нормальную форму, если двойной ряд

$$\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots + \dfrac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2} + \dfrac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2} + \dfrac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2} + \dfrac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2} + \ldots \\
\ldots + \dfrac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2} + \dfrac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2} + \dfrac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2} + \dfrac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2} + \ldots \\
\ldots + \dfrac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2} + \dfrac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2} + \dfrac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2} + \dfrac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2} + \ldots \\
\ldots + \dfrac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2} + \dfrac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2} + \dfrac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2} + \dfrac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2} + \ldots \\
\ldots + \dfrac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2} + \dfrac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2} + \dfrac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2} + \dfrac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

сходится абсолютно в полосе G $[4, c.332]$.

ТЕОРЕМА 1. Матрица (10) имеет нормальную форму

Доказательство. Суммируя по строкам, затем полученные суммы по столбцам, имеем ряд

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{S}{(\mu+ip)^2},$$

который сходится абсолютно в G , где

$$S = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p, \quad a_0 = 0$$

также сходится абсолютно в G $[4, c.332]$.

Тогда соответствующая, векторному уравнению (9) бесконечная линейная система называется нормальной, а определитель системы

$$\Delta_2(\mu) = \det A_2(\mu)$$

также называется нормальным, где $\Delta_2(\mu)$ есть функция от комплексной переменной μ .

Нормальная система обладает многими свойствами конечных систем, в частности, однородная нормальная линейная система бесконечных линей
ных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель равен нулю

$$\Delta_2(\mu) = detA_2(\mu) = 0.$$

Следующая наша задача – **внесение полюсов** в элементы матрицы, точнее, в нулевую строку матрицы $A_0(\mu)$. Для этого, **пользуясь условием поляризации характеристических показателей,** построим левую дигональную матрицу с **ненулевым носителем** $(\alpha \neq 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Диагональная матрица

$$\lambda(\mu) = diag\left[\cdots, \frac{1}{(\mu-2i)^2-\alpha}, \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha}, \frac{1}{(\mu-0i)^2-\alpha}, \frac{1}{(\mu+i)^2-\alpha}, \frac{1}{(\mu+2i)^2-\alpha}, \ldots\right] =$$

$$
= \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & \\
& \frac{1}{(\mu-2i)^2-\alpha} & & & 0 & \\
& & \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & & & \\
& & & \frac{1}{(\mu-0i)^2-\alpha} & & \\
& 0 & & & \frac{1}{(\mu+i)^2-\alpha} & \\
& & & & & \frac{1}{(\mu+2i)^2-\alpha} \\
& & & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

называется **поляризующей матрицей с ненулевым носителем (**$\alpha \neq 0$**).**

Действуя слева на векторное уравнение (5) **поляризующим множителем,** $\lambda(\mu)$ имеем $[3]$

$$A_1(\mu)\cdot\vec{z}=0, \qquad (11)$$

где матрица имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ldots 1+\frac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots \frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2-\alpha}+\ldots \\
\ldots\frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots+\frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots\frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha}+\ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{pmatrix}
$$

Литература

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.Москва.:Наука., 1972. – 718 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – Москва.: Наука., 1972. – 718 с.
3. 3. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области техничес ких колебаний. // Москва: АН. СССР, 1936.– 48 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Керимбеков А.