Мальчик Ю.Н.

О СПОСОБАХ АППРОКС ИММАЦИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Yu. N. Malchik

ABOUT METHODS APPROXIMATION OF GENERAL SOLUTION EQUATIONS OF FREE OSCILATIONS THE SYSTEM SECOND ORDER

УДК: 62-50

В настоящей статье уточняется диапазон действия формулы приближенного решения обобщенного характеристического уравнения, полученной в статье [2].

Выявлены недостатки алгоритма итерационного поиска корней обобщенного характеристического уравнения, предложенного в статье [3], и исправлен этот алгоритм.

In this article, define more precisely of operation range of approximation formula for general characteristic solution, which came out in paper [2].

The author discover defect the algorithm of iteration search roots of general characteristic solution and correct this algorithm which came out in paper [3].

1. Введение

Рассмотрим уравнение свободных колебаний (УСК) нестационарной линейной системы (НДС)

$$\left[p^2 + b_1(t)p + b_2(t)\right]x(t) = 0,\ p \equiv \frac{d}{dt},\ t \in (0, T),$$

$$x(0) = x_0\ ,\ x'(0) = x'\ , \qquad (1.1)$$

где $b_1(t)$, $b_2(t)$ – аналитические функции аргумента t на интервале $(0, T)$.

Задачи анализа и синтеза таких систем существенно упрощаются, если известно аналитическое выражение общего решения УСК.

Класс систем, для которых существует точное общее решение УСК (1.1) в конечном виде (выражается через конечное число операций над элементарными функциями), весьма ограничен. Общее решение в квадратурах, когда интегралы не выражаются с помощью конечного числа операций над элементарными функциями неприемлемо. На практике возникает задача аппроксимации общего решения УСК. Один из путей отыскания приближенной формулы общего решения УСК состоит в переходе к обобщенному характеристическому уравнению (ОХУ) [1],

$$\zeta^2 + b_1(t)\cdot\zeta + b_2(t) + \zeta' = 0\ . \qquad (1.2)$$

получаемому из (1.1) подстановкой $x = \exp\int\zeta\,dt$, фундаментальная система корней ζ_1, ζ_2 которого является решениями УСК (1.1) и, в заключении к формированию приближенной формулы общего решения УСК на основе найденных приближенных формул.

В работе [1] изложен ряд итерационных способов отыскания корней ОХУ, в [2,3] - новые способы для уравнения второго порядка и в [4] предложен новый итерационный способ для уравнений второго и третьего порядка. Вероятно, каждый способ имеет свою область применения, однако, авторы эти области не указали.

Возникает вопрос, какому способу отдать предпочтение и когда закончить итерационный процесс в каждом конкретном случае. Эта статья посвящена поиску ответов на поставленные вопросы.

2. Способ аппроксимации корней ОХУ, как решение квадратного уравнения

В работе [2] рассмотрен способ приближенного вычисления корней ОХУ, как решение квадратного уравнения (1.2).

$$\zeta_{1,2} = -\frac{b_1}{2} - \frac{D'}{4D} \pm \sqrt{D}. \qquad (2.1)$$

Здесь: функция

$$D(t) = \frac{b_1^{\ 2}}{4} + \frac{b'_1}{2} - b_2\ , \qquad (2.2)$$

названа в работе [2] детерминантом. Формула (2.1) получена при допущении

$$\left|\zeta'\right| < \left|D(t)\right|. \qquad (2.3)$$

Там же сделано *утверждение*, что если детерминант (2.2) удовлетворяет условию:

$D = k$, $k = \mathrm{const}$, $k \neq 0$, (2.4)

то формула (2.1) дает точные значения корней ζ_1, ζ_2 уравнения (1.2).

Условие (2.4) не точно, его следует скорректировать. Действительно, рассмотрим пример.

Пример 1. Найти приближенное решение корней ОХУ (1.2), если:

$b_1 = -2(at+b)$; $b_2 = (at + b)^2 - a$. (2.5)

Решение. С учетом (2.5) по формуле (2.2) получим $D = 0$, $D' = 0$.

Тогда с учетом (2.3) $D'/4D = 0$ и по формуле (2.1) получим

$$\zeta_1 = at + b. \tag{2.6}$$

Второй корень можно найти из уравнения

$$u' - (2\cdot\zeta_1 + b_1)\cdot u = 1,$$

полученного с помощью подстановки $\zeta_2 = \zeta_1 + 1/u$. Отсюда второй корень равен

$$\zeta_2 = at + b + \frac{a}{at+b}. \tag{2.7}$$

Тогда общее решение УСК (1.1) с коэффициентами (2.5) может быть представлен в виде

$$x_{\text{îäí}} = c_1 \exp\left(\frac{a}{2}t^2 + dt\right) + c_2(at+d)\exp\left(\frac{a}{2}t^2 + dt\right). \tag{2.8}$$

Уточнение допущения (2.3) и условия (2.4). Формула (2.1) может быть получена при условии

$$|\zeta'| \le |D(t)|. \tag{2.9}$$

Отсюда не следует что $D(t) \neq 0$.

Если детерминант удовлетворяет условию

$$D = k,\ k = \text{const}, \tag{2.10}$$

то формула (2.1) дает точные значения корней ζ_1, ζ_2 уравнения (1.2). Если детерминант удовлетворяет условию $D = 0$, то формула (2.1) дает точное значение только одного корня ζ_1 уравнения (1.2).

Обратное утверждение, «если известны точные значения корней ζ_1, ζ_2 уравнения (1.2), то детерминант удовлетворяет условию

$D = k$, $k = \text{const}$,

не верно».

Пример 2. Найти приближенное решение корней ОХУ (1.2), если:

$$b_1 = 1/t;\quad b_2 = -1/t^2. \tag{2.11}$$

Решение. С учетом (2.11), по формуле (2.2) получим

$$D = \frac{3}{4t^2}. \tag{2.12}$$

Теперь ищем аппроксимации корней ζ_1, ζ_2 по формуле (2.1)

$$\tilde{\zeta}_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2t}. \tag{2.13}$$

Однако точные значения корней ζ_1, ζ_2 равны [5]:

$$\zeta_{1,2} = \pm\frac{1}{t}. \tag{2.14}$$

Пример 2 подтверждает мысль, что обратное утверждение не верно.

Автор работы [1] утверждает, что точность формулы (2.1 часто практически приемлема. Проверим это утверждение на примере 2 следующим образом. Решим задачу Коши для уравнения (1.1) с коэффициентами (2.11) и начальных условиях:

$$x(1) = 0,\ x'(1) = 1. \tag{2.15}$$

В этом случае аналитическое точное решение задачи Коши будет

$$x1(t) = 0.5\,t + -0.5/t. \tag{2.16}$$

Далее, с учетом (2.13) аппроксимация фундаментальной системы решений уравнения (1.1) с коэффициентами (2.11) будет:

$$\tilde{x}_1 = t^{\sqrt{3}/2},\quad \tilde{x}_2 = t^{-\sqrt{3}/2}.$$

Тогда приближенное решение задачи Коши будет

$$x2(t) = 0.557\,t + -0.557/t. \tag{2.17}$$

Решение задачи Коши на ЭВМ будет

Given

$x''(t) + 1/t\cdot x(t)' - 1/t^2\cdot x(t) = 0$

$x'(1) = 1$ $x(1) = 0$

x : = Odesolve(t, 5)

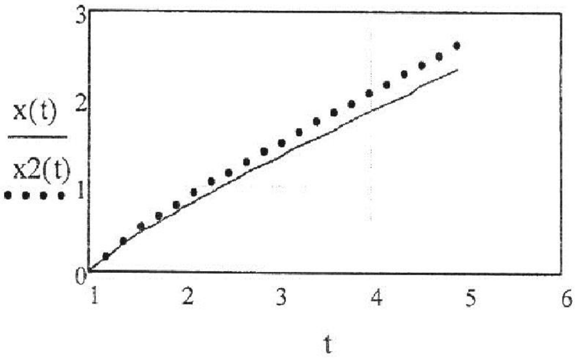

Рис.1.

Здесь: x(t) – точное решение задачи Коши; x2(t) - приближенное решение этой задачи.

3. Итерационные способы аппроксимации корней обобщенного характеристического уравнения

В работе [3] предложен новый итерационный способ приближенного вычисления корней ОХУ, как решение квадратного уравнения (1.2). Он состоит в следующем:

Если

$$\left|\frac{\zeta_i'}{\Delta}\right| \le 1, \tag{3.1}$$

где

$$\Delta = \frac{b_1^2}{4} - b_2, \tag{3.2}$$

то

$$\zeta_i^{(k+1)} = \frac{b_1^2}{2} \pm \sqrt{\Delta}\left(1 - \frac{\zeta_i'^{(k-1)}}{\Delta}\right)^{1/2}, \tag{3.3}$$

или с учетом

$$\sqrt{1-v} = 1 - v/2, \quad v = \zeta'/k, \tag{3.4}$$

получим

$$\zeta_i^{(k+1)} = \frac{b_1^2}{2} \pm \sqrt{\Delta}\left(1 - \frac{\zeta_i'^{(k-1)}}{2\Delta}\right). \tag{3.5}$$

Положив $\zeta_i'^{(0)} = 0$, из (3.5) получим

$$\zeta_i^{(1)} = \frac{b_1^2}{2} \pm \sqrt{\Delta}. \tag{3.6}$$

Если

$$\left|\frac{\Delta}{\zeta_i'}\right| \le 1, \tag{3.7}$$

то

$$\zeta_i^{(k+1)} = \frac{b_1^2}{2} \pm j\sqrt{\zeta_i'^{(k-1)}}\left(1 - \frac{\Delta'}{2\zeta_i'^{(k-1)}}\right). \tag{3.8}$$

Предложенный алгоритм содержит серьезные недостатки.

Во первых, авторы статьи утверждают, что условия (3.1) и (3.7) на рассматриваемом интервале $[t_0, T)$ могут меняться. Следовательно, корни ОХУ надо искать по двум формулам (3.5) и (3.7).

Во вторых сходимость итерационного процесса в предложенном алгоритме – случайное событие (процесс может сходиться, а может расходиться). Возможно, процессы будут сходиться в некоторых случаях, но искомые точные корни мы не найдем. От приближенных формул бессмысленно ожидать точных результатов.

Покажем это на примере.

Пример 3. Найти корни ОХУ

$$\zeta^2 - 2(at+d)\zeta + (at+d)^2 - a - \zeta' = 0 \tag{3.9}$$

Решение. По формуле (3.2) определяем $\Delta = a$. Тогда

$\zeta_i^{(1)} = at + d \pm a$, $\zeta_i'^{(1)} = a$.

Отсюда по формуле (3.5) получим

$$\zeta_i^{(2)} = at + d \pm \frac{1}{2}\sqrt{a}.$$

Таким образом

$$\zeta_i = at + d \pm \frac{1}{2}\sqrt{a}, \quad i = 1, 2. \tag{3.10}$$

Очевидно, что рекуррентный процесс закончился. Однако фундаментальная система точных коней имеет вид (2.6), (2.7).

Описанный в [3] алгоритм можно исправить следующим образом.

Решение уравнения (1.2) представим как рекуррентную формулу

$$\zeta_i^{(k+1)} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{b_1^2/4 - b_2 - \zeta_i'^{(k)}}. \tag{3.11}$$

Полагая $\zeta_i^{(0)} = 0$, из (3.11) получим первую итерацию и ее производную:

$$\zeta_i^{(1)} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{b_1^2/4 - b_2}, \quad \zeta_i'^{(1)} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{b_1^2/4 - b_2}\right). \tag{3.12}$$

Отсюда вторая итерация будет

$$\zeta_i^{(2)} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{b_1^2/4 - b_2 - \zeta_i'^{(1)}}, \tag{3.13}$$

и т. д.

Решаем пример 3по описанному алгоритму.

По формулам (3.12) получим

$$\zeta_i^{(1)} = (at+d) \pm \sqrt{a}, \quad \zeta_i'^{(1)} = a.$$

Отсюда по формуле (3.13) получим

$$\zeta_i^{(2)} = at + d.$$

Таким образом, $\zeta_1 = a\,t + d$, второй корень ζ_2 был найден в разделе 2 и имеет вид (2.7).

У исправленного алгоритма тот же недостаток – процесс может сходиться, а может и расходиться. От этого недостатка можно избавиться сле-дующим образом. Обобщенное характеристическое уравнение (1.2) - это дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta^2 + b_1(t)\cdot\zeta + b_2(t) \qquad (3.14)$$

Уравнение(3.14) может быть решено методом Пикара с использованием рекуррентной формулы

$$\zeta^{(k+1)} = \zeta_0 + \int_a^t \left(\left(\zeta^{(k)}\right)^2 + b_1(v)\cdot\zeta^{(k)} + b_2(v) \right) dv, \quad a = t_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.15)$$

Здесь $\zeta(t_0) = \zeta_0$ – начальные условия, связанные с начальными условиями УСК соотношением $\zeta_0 = x'(t_0)/x(t_0)$. Как известно, процесс (3.15) является сходящимся. Его можно строить следующим образом:

$$\zeta^{(1)} = \zeta_0 + \int_a^t \left(\zeta_0{}^2 + b_1(v)\cdot\zeta_0 + b_2(v)\right) dv, \qquad (3.16)$$

$$\zeta^{(2)} = \zeta_0 + \int_a^t \left((\zeta^{(1)})^2 + b_1(v)\cdot\zeta^{(1)} + b_2(v)\right) dv, \qquad (3.17)$$

и т. д.

Число итераций зависит от требуемой точности решения ОХУ. С подошью ЭВМ в среде MathCAD можно найти точное решение по следующей программе.

Given

$\zeta'(t) = \zeta^2(t) + b_1(t)\,\zeta + b_2(t) \qquad \zeta(t_0) = 0$

$\zeta :=$ Odesolve$(t, \mathrm{T}) \qquad t := t_0\,,\ t_0+\Delta t\ ..\ T$

Строим график $\zeta(t)$ и сравниваем с последней итерацией $\zeta^{(k)}$. Если точность нас не устраивает, находим $\zeta^{(k+1)}$итерацию и опять сравниваем с $\zeta(t)$ и т.д. пока кривые не совпадут.

После того как с достаточной точностью будет найден первый корень ζ_1, второй корень ОХУ можно найти решив уравнение

$$u' - (2\cdot\zeta_1 + b_1)\cdot u = 1 \qquad (3.18)\backslash$$

полученного с помощью подстановки $\zeta_2 = \zeta_1 + 1/u$.

Если возникнут проблемы при вычислении интегралов (3.16) и (3.17) (интегралы не вычисляются в конечном виде), то решение уравнения (3.14) можно искать в виде степенного ряда

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k, \qquad (3.19)$$

где

$$a_k = 1/k!\cdot p^k \zeta(t_0)\,. \qquad (3.20)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 определяются из начальных условий: $a_0 = \zeta_0$, $a_1 = \zeta^2(t_0) + b_1(t_0)\ \zeta(t_0) + b_2(t_0)$. Остальные коэффициенты определяются путем дифференцирования уравнения (3.14).

Введем функции c_1 и c_2:

$$c_1 = -(\zeta_1 + \zeta_2)\,, \qquad c_2 = \zeta_1\cdot\zeta_2\,, \qquad (3.21)$$

и запишем алгебраическое уравнение:

$$\zeta^2 + c_1(t)\cdot\zeta + c_2(t) = 0\,. \qquad (3.22)$$

Это уравнение называется корневым уравнением (КУ) [1]. Его коэффициенты, как показано в [4], связаны с коэффициентами ОХУ следующими дифференциальными уравнениями:

$$b_1 = c_1 - \frac{c_1\,c_1' - 2\,c_2'}{c^2{}_1 - 4\,c_2}\,,$$

$$b_2 = c2 - \frac{2\,c_1'\,c_2 - c_1 c_2'}{c^2{}_1 - 4\,c_2}\,. \qquad (3.23)$$

Уравнения (3.21) удобны для построения итеративного процесса отыскания корней КУ с последующим отысканием корней ОХУ и его коэффициентов. Этот процесс строится по формулам:

$$c_1{}^{k+1} = b_1 + \frac{c_1{}^k\,c_1'^k - 2\,c_2'^k}{(c_1{}^k)^2 - 4\,c_2{}^k}$$

$$c_2{}^{k+1} = b_2 + \frac{2\,c_1'^k\,c_2{}^k - c_1{}^k\,c_2'^k}{(c_1{}^k)^2 - 4\,c_2{}^k} \qquad (3.24)$$

Здесь: индекс $k = 0, 1, \ldots$; нулевое приближение может быть задано следующим образом $c_1{}^0 = b_1$; $c_2{}^0 = b_2$.

Для многих классов уравнений этот процесс итерации сходится [4].

Пример 4. Найти корни ОХУ

$$\zeta^2 + \frac{1}{t}\cdot\zeta + -\frac{1}{t^2} + \zeta' = 0 \qquad (3.25)$$

Решение. Задаемся коэффициентами КУ (3.22): $c_1{}^0 = 1/t$; $c_2{}^0 = -1/t^2$.

Тогда по формулам (3.24) получим: $c_1{}^1 = 0$; $c_2{}^1 = -1/t^2$ и из (3.22) получим точные корни ОХУ (3.26)

$$\zeta_{1,2} = \pm\ \frac{1}{t} \qquad (3.26)$$

4. Заключение

1. В настоящей статье уточнен диапазон действия приближенной формулы решения ОХУ как квадратного уравнения, полученной Михайловым Ф.А. в статье [2].

2. Выявлены существенные недостатки алгоритма итерационного по-иска корней ОХУ предложенного Кузнецовым и др. в статье [3] из-за которых эта работа не нашла дальнейшего применения. Исправлен алгоритм поиска корней ОХУ и предложен новый метод решения ОХУ как уравнения Риккати.

3. Метод поиска коэффициентов % корневого уравнения с последующим отысканием корней ОХУ разработанный Михайловым Ф.А. и Хаджиновым М.К. безупречен и является универсальным.

Литература:

1. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем. М.: Машиностроение, 1977. - 296 с.
2. Булеков В.П. Динамические свойства и характеристики линейных систем второго порядка. //Изв. АН СССР, сер. Техническая кибернетика, 1967, №4, с. 173-180.
3. Кузнецов В.П., Михайлов Ф.А., Саликова И.М. и др. К вопросу приближенного вычисления корней обобщенного характеристического уравнения нестационарной линейной системы. // В. сб. Системы и средства автоматизации производств». Киев, 1974, с. 106-112.
4. Михайлов Ф.А., Хаджинов М.К. применение обобщенного характеристического уравнения к расчету процессов в нестационарных линейных системах. // В кн: «Труды МАИ им. С. Орджоникидзе». М.: вып. 282, 1974, с. 96-105.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИЛ, 1976, 828 с.

Рецензент: д.т.н., Свиденко В.Н.