ФИЗИКА. ТЕХНИКА. ТЕХНОЛОГИЯ

Байманкулов А.Т.

ОДИН УСТОЙЧИВЫЙ ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИОННОСТИ ПОЧВЫ

A. T. Baymankulov

ONE STABLE APPROXIMATE METHOD TO DETERMINE THE COEFFICIENT OF DIFFUSION SOIL

УДК: 519.62:624. J31

В работе рассматривается движение влаги в грунте под действием объемных сил. Предлагается итерационный метод, с помощью которого определяется коэффициент диффузионности грунта. Доказывается устойчивость предложенного метода.

The paper disclses the movement of moisture in the soil under the influence of body forces. An iterative method is suggested to define the diffusion coefficient of the soil, The stability of this method is proved.

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к которым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил, представляющих градиент давления, потенциала градиентного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ. Почвенная влага движется под действием объемных сил, поверхностные и граничные эффекты здесь не играют роли [1]. Поэтому принимая во внимание и решая относительно простую задачу, предполагающую:

1) отсутствие электрического поля;
2) изотермия вдоль потока;
3)постоянства концентрации растворимых веществ можно движение влаги в почве описать нелинейным уравнением [1]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

Здесь W влажность в долях единицы, z - глубина, t- время, D(W) - коэффициент диффузионности. Уравнение это получено на основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления. Диффузионная модель, предполагающая, что если в начальный момент задана неравномерная влажность, то должен возникнуть поток влаги из более влажных в менее влажные слои, часто не оправдывается. Прямые, достаточно убедительные и многократно выполненные опыты демонстрирует иногда обратный знак потока от слоев с малым к слоям с большим влагосодержанием [2-4]. Эти факты входит в противоречие с законом Дарси, лежащим в основе диффузионной теории. Для того чтобы сохранить закон Дарси и в то же время объяснить наличие потоков против потенциала влажности, сделан ряд тщетных попыток, в частности, в отношений перехода от линейного к нелинейному уравнению диффузии [1]. Как выяснилось, действительное объяснение опытных фактов и правильное истолкование того, когда и при каких условиях происходит движение влаги в прямом и обратном направлении, возможно на основе, модифицированного уравнения диффузии [2]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial z} + A\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z}\right)$$

Решение этого уравнения при различных краевых условиях и с помощью различных методов посвящены работы [3, 5, 6]. Чтобы решить уравнение (2), необходимо сформулировать начальные и граничные условия. В самом простом варианте ими будут:

1) заданный в начальный момент глубинный ход влажности

$$W(z,0)= \varphi(z),\ t=0$$

2) Изоляция в смысле обмена влагой между некоторым верхним слоем почвы H и ее нижними слоями т.е.

$$\frac{\partial W(0,t)}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

3) заданная скорость расхода влаги

$$\frac{dB(t)}{dt} = f(t) \qquad (5)$$

Где $B(t)$ - влагосодержание в момент времени t, приходящееся на весь слой $0 - H$, т.е.

$$B(t) = \int_0^H W(z,t)dz$$

4) Подставляя его в проинтегрированное в пределах от 0 до H уравнение (2), получим

$$-\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial z} + A\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z}\right)\bigg|_{z=H} = f(t) \qquad (6)$$

Соотношения (6) выражает поток влаги с поверхности почвы, т.е. по существу говоря, величину испарения, что наглядно видно, когда мы, вместо модифицированного уравнения влагопереноса, переходим к каноническому уравнению диффузию (1), предполагающему $A = 0$.

В настоящей работе изучается нахождения коэффициента диффузионности $D(W)$. Для этого необходимо задаваться еще одним дополнительным условием. А именно задаемся изменением влаги на поверхности земли в течение определенного времени T, т.е.

$$W\big|_{t=0} = F(t) \qquad (7)$$

Коэффициент диффузионности $D(W)$ определяется итеративно. Предполагая, что система (1)-(7) справедливо для последовательных приближений $D_n(W)$, $D_{n+1}(W)$ и рассуждая также как в работе [7] получаем сопряженную задачу:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D(W)\frac{\partial \psi}{\partial z} - A\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}\right) = 0 \qquad (8)$$

$$\psi(z,T) = 0, \quad \left(D(W)\frac{\partial \psi}{\partial z} - A\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}\right)\bigg|_{z=0} = 0 \qquad (9)$$

$$\left(D(W)\frac{\partial \psi}{\partial z} - A\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}\right)\bigg|_{z=H} = 2\left(W\big|_{z=H} - F(t)\right) \qquad (10)$$

При этом выводится следующая формула

$$2\int_0^T\left(\overset{n+1}{W}\bigg|_{z=H} - F(t)\right)\delta W dt = -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}dtdz \qquad (11)$$

Здесь $\delta W = \overset{n+1}{W} - \overset{n}{W}$, $\delta D = D_{n+1}(W) - D_n(W)$. Задавая $D_n(W)$, следующее приближение $D_{n+1}(W)$ определяется из минимума функционала

$$J(D) = \int_0^T\left(\overset{n+1}{W}\bigg|_{z=H} - F(t)\right)^2 dt.$$

Тогда с учетом (11) имеем формулу

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) = -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}dtdz - \int_0^T (\partial W)^2\big|_{z=H} dt.$$

Если $D_{n+1} = D_n + \beta_n \dfrac{\partial W}{\partial z}\dfrac{\partial \psi}{\partial z}$, то

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) = -\int_0^T\int_0^H \beta_n\left(\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dzdt - \int_0^T (\delta W)^2\big|_{z=H} dt$$

То есть, построена минимизирующая последовательность такая, что

$$J(D_0) \geq J(D_1) \geq \ldots \geq J(D_n) \geq \ldots$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для решения задачи (1)-(6) справедлива оценка

$$\|W\|^2 + A\left\|\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 + 2\int_0^T \left\|\sqrt{D(W)}\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 d\tau \leq C_1\left(\|W_0\|^2 + A\left\|\frac{\partial W_0}{\partial z}\right\|^2 + \int_0^T f^2(\tau)d\tau\right),$$

$$\max_t \max_z |W| \leq C_2 < \infty$$

Теорема 2. Решения задачи (1)-(6) является устойчивой по $f(t)$ и $W_0(z)$, т.е. справедлива оценка

$$\left\|W - \widetilde{W}\right\|^2 + A\left\|\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z}\right\|^2 + 2\int_0^T \left\|\sqrt{D(W)}\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z}\right)\right\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq C_3\left(\left\|W_0 - \widetilde{W}_0\right\|^2 + A\left\|\frac{\partial W_0}{\partial z} - \frac{\partial \widetilde{W}_0}{\partial z}\right\|^2 + \int_0^T \left|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)\right|^2 d\tau\right)$$

Здесь $\widetilde{W}$ - решение возмущенной задачи.

Теорема 3. Для решения задачи (8)-(11) справедлива оценка

$$\|\psi\|^2 + A\left\|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\|^2 + 2\int_0^T \left\|\sqrt{D(W)}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\|^2 d\tau \leq C_4\int_t^T \left(W|_{z=H} - F(\tau)\right)^2 d\tau.$$

Теорема 4. Решения задачи (8)-(11) является устойчивой по $f(t)$, $F(t)$ и $W_0(z)$, т.е. справедлива оценка

$$\left\|\psi - \tilde{\psi}\right\|^2 + A\left\|\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}\right\|^2 + 2\int_t^T \left\|\sqrt{D(W)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}\right)\right\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq C_5\left(\left\|W_0 - \widetilde{W}_0\right\|^2 + A\left\|\frac{\partial W_0}{\partial z} - \frac{\partial \widetilde{W}_0}{\partial z}\right\|^2 + \int_t^T \left|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)\right|^2 d\tau + \int_t^T \left|F(\tau) - \widetilde{F}(\tau)\right|^2 d\tau\right)$$

Литература:

1. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. – М.: Наука, 1976, 352с.

2. Hallaire.L' eau et la productions vegetable. Institute National de la Recherche Agronomique, №9, 1964.

3. Нерпин С.В., Юзефович Г.И. О расчете нестанционарного движение влаги в почве// Доклады ВАСХНИЛ, №6, 1966.

4. Бондаренко И.Ф. и др. Расчетные методы прогноза водного режима и его регулирование. //М.: В сб. Физика, химия, биология и минералогия почв СССР, 1964.

5. Юзефович Г.И., Янгарбер В.А. Исследование нелинейнего уравнение влагопереноса. // Л.: Колос. Сб. трудов по агрофизике, вып.№14, 1967.

6. Янгарбер В.А. Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса. // М.: Доклады ВАСХНИЛ, №8, 1966.

7. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Жээналиев М.А.