Бейсембин К.Р.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИЙ В ПЛОТИНЕ ПО НЕЛИНЕЙНОМУ ЗАКОНУ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

K.R. Beysembin

DEFINITION OF FACTOR FILTRATION PROCESS IN THE NON-LINEAR LAW OF DAMS BASED ON MATHEMATICAL MODELING

УДК: 532. 546

В статье рассматривается моделирование процесса фильтрации в теле плотины. Зависимость эмпирических коэффициентов от напора и расхода плотины определяется как образец одномерной модели фильтрации. Многие практические проблемы процеживания характеризуется на основе модели основанной по закону Дарси. Но закон Дарси можно использовать на ограниченном интервале напора или скорости фильтрации.

The article deals with modeling of the filtration process in the body of the dam. The dependence of the empirical coefficients from the pressure and flow of the dam is defined as a pattern of one-dimensional model of the filtration.- Many practical problems straining characterized based on the model based on Darcy's law. But Darcy's law can be used on a limited range of pressure or velocity.

В этой статье рассматривается модель фильтрации основаннной по закону Р. Прони обобщающий закон Дарси:

$$- \text{grad } H = \alpha \cdot \bar{\vartheta} - \beta_1 \cdot \bar{\vartheta}$$

Данный закон является прямым обобщением закона Дарси (при β= 0) и имеет, естественно, более широкие границы применимости, чем закон Дарси. Обычно при решении практических задач, если это возможно, стараются моделировать процесс фильтрации с помощью закона Дарси.

Вместе с тем известно, что сам закон Дарси является приближённым (экспериментально установленным) законом и поэтому естественно ожидать, что математические модели фильтрации на основе закона Дарси требуют определённой доработки.

Сложность в случае выбора закона Дюпюи - Форхгеймера заключается в подборе коэффициентов и Р в соотношении (1), отвечающим конкретным условиям фильтрационного процесса. В случае

закона Дарси (при I^3-0) коэффициент $^{a\,=}$ где К-коэффициент фильтрации. Коэффициент

фильтрации является наиболее полно изученным, с физической и математической точек зрения, показателем процесса фильтрации и его определение (вычисление) в каждом конкретном случае не составляет большого труда. Иное дело, если мы в качестве основного закона фильтрации выбрали закон

Дюпюи - Форхгеймера. Здесь единственным критерием определения коэффициентов ^{u} и Р являются теоретические и экспериментальные (модельные) исследования, в результате которых можно получить
приближённую зависимость коэффициентов ® и Р от напора и расхода дамбы.

В данной статье рассматривается как образец приближенной зависимости коэффициентов 'a-' Р между напором и расходом плотины. В направлении оси ОХ рассматриваем постоянную фильтрацию однородной плотины (рис.1). В направлении фильтрации (ось Х) длина плотины L, а ширина (в направлении перпендикулярной к плоскости черчения соответствует оси У) считаем равной 1-е. А также принимаем, что плотина состоит из водонепроницаемого дна и из вертикальной стены и объектом противостоящий к мелкому и среднему давлению.

Смоделирована одномерная стационарная фильтрация в теле однородной фильтрующей дамбы в направлении оси Ох, схема которой приведена на рисунке 1.

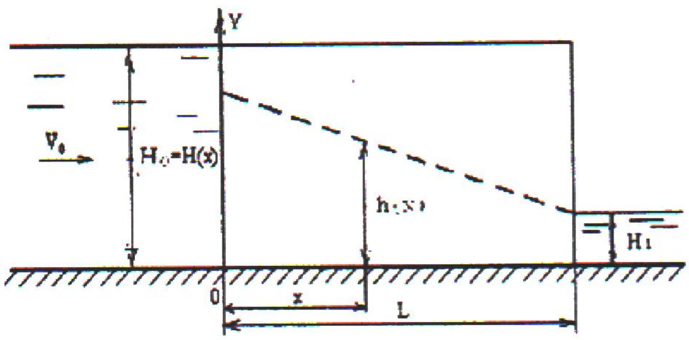

Рис. 1 - Схема к расчету фильтрации через однородную среду

Будем считать, что длина дамбы в направлении фильтрации (оси x) равна L, а ширина дамбы (в направлении оси y, перпендикулярной плоскости чертежа) равна 1. Предполагается, что дамба имеет горизонтальное непроницаемое основание и вертикальные стенки. Пусть вода и тело дамбы несжимаемы, где H_0 - глубина воды в верхнем бьефе. H_1 - глубина воды в нижнем бьефе.

Составим математическую модель данной задачи на основе уравнений, считая течение одномерным и стационарным. Тогда областью фильтрации является отрезок [0,L] по оси x с границами $x=0$ *и* x=L. Выберем в качестве плоскости сравнение плоскость Oxy, тогда глубина воды $h(x)$ в точке x дамбы совпадает с гидростатическим напором $H(x)$ в $(x) \in [0,L]$,

Напишем уравнение неразрывности для рассматриваемого процесса:

$$\frac{d}{dx}(\rho, h(x) \cdot V(x) \cdot b) - 0$$

где ρ - плотность жидкости;

$v(x)$ - скорость фильтрации в точке;

$h(x)$ - глубина водоносного слоя в точке x.

Пользуясь тем, что жидкость несжимаема $\rho = const, h(x) = H(x)$ и интегрируя последнее уравнение имеем:

$$H(x) \cdot v(x) = const \tag{2}$$

В силу определения скорости фильтрации и сделанного выше предположения о единичной ширине дамбы:

$$v(x) = Q(x), \tag{3}$$

где $Q(x)$ - расход жидкости в точке x.

Следовательно, в силу (2) и (3) имеем:

$$Q(x) = const = Q \text{ и } H(x) = \vartheta(x) = Q \tag{4}$$

Подставляя выражение для $v(x)$ из соотношения (1) в закон фильтрации получим:

$$-\frac{dH}{dx} = \alpha \frac{Q}{H} + \beta \frac{Q^2}{H^2}$$

$$\frac{dH(x)}{dx} + \alpha Q \frac{1}{H(x)} + \beta Q^2 \frac{1}{H^2(x)} = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{5}$$

Соотношение (5) есть искомое дифференциальное уравнение, описывающее фильтрацию в теле дамбы. К этому уравнению нужно добавить начальное условие:

$$H_{(0)} = H_0 \tag{6}$$

на левой границе области фильтрации.

Таким образом, если задан расход фильтрующей дамбы Q, то искомый напор $H(x)$ является решением задач (5) и (6). Иногда вместо расхода задаётся напор на правой границе области фильтрации:

$$H(L) = H_1 \tag{7}$$

Тогда задача расчёта рассматриваемого безнапорного фильтрационного напора потока равносильна математической задаче определения $H(x)$ и Q из соотношения (5)-(7).

При решении этих задач коэффициенты α и β считаются заданными, при этом они, естественно, зависят от характеристик пористой среды и жидкости.

Решением задачи (5) и (6) или (5)-(7) называется положительная функция $H(x)>0$, заданная на отрезке $[O, L]$ (и число Q), удовлетворявшая соотношениями (5) и (6) или (5) (7).

Здесь условие положительности функции $H(x)$ заложено исходя из физической сути задачи, ибо отрицательные значения напора в теле плотины не имеют физического смысла. Исходя из физической сути явлений можем сказать, что если коэффициенты α и β определены правильно в соответствии с конкретными условиями рассматриваемой задачи, то на самом деле должно выполняться ещё одно условие:

$$\frac{dH}{dx} \le 0$$

Вопрос о существовании решения рассмотренных выше задач на всём интервале *[0, L]* открыт. Известные общие теоремы гарантируют существование и единственность решения в некоторой окрестности точки $x=0$, пока $H>0$. Длина этой окрестности определяется коэффициентом Липшица правой части уравнения (5), что никак не связано с длиной дамбы L. Если длина дамбы достаточно большая, то решения рассматриваемых задач могут не существовать. Поэтому для корректности задачи коэффициенты α и β должны ещё зависеть от длины L плотины.

Для демонстрации сказанного рассмотрим частный случай задачи (5) и (6), когда $\beta = 0$ (модель на основе закона Дарси). Тогда полученная задача решается аналитически, и её решение имеет вид:

$$H(x) = \sqrt{H_0^2 - 2\alpha Q x},\ 0 < x < L \tag{8}$$

Как видно из этой формулы при $L > \frac{H_0^2}{2\alpha Q}$ положительное решение задачи (5) и (6) не существует. Парадоксальная на первый взгляд зависимость а от длины плотины L становится понятной, если мы найдём α из формулы (8):

$$\alpha = \frac{H_0^2 - H^2(x)}{2Qx} \tag{9}$$

Следовательно, а зависит не от длины L, а от координаты x, что правомерно для неоднородных пористых материалов. А если пористая среда является однородной, то напор $H(x)$ в теле плотины меняется таким образом, чтобы правая часть уравнения (9) оставалась постоянной величиной. Из уравнения (9) также следует, что если длина дамбы достаточно большая, то существование положительного по всей длине плотины решения зависит от начального напора H_0 (чем больше L, тем больше должен быть H_0).

Рассматриваем другой частный случай модели, когда $\alpha = 0$.

В этом случае задача (5) и (6) также решается аналитически:

$$\sqrt[3]{H_0^3 - 33Q^2x},\ 0 \le x \le L \tag{10}$$

Таким же образом можно решить и другие задачи, связанные с процессом фильтрации. Допустим, у нас есть экспериментальные значения напоров H(x) при нескольких значениях x, а также нам известен (экспериментально) расход фильтрующей дамбы Q. Требуется найти коэффициенты α и β в законе (1), так, чтобы соответствующее решение задачи (5) и (6) наилучшим образом аппроксимировало экспериментальные данные. Выражением "аппроксимировать наилучшим образом" понимать суммы абсолютных отклонений решения от экспериментальных данных в точках, в которых заданы эти данные.

Итак, пусть $H_i, i = 0,1,2,\dots,n$, значения напоров в точках $x_i,\ i = 0,1,2,\dots n$, причём, $x_0 = 0, x_n = L$, требуется найти $(\alpha,\beta) \in R^2$ такую, чтобы:

$$F(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n} |H_i - H(x_i,\alpha,\beta)| \to min \tag{11}$$

где $H(x,\alpha,\beta)$ - решение задачи (5) и (6) соответствующее значениям, фиксированным α β.

Из изложенного следует, что не для всех точек $(\alpha,\beta) \in DCR^2$ решение задачи (5) и (6) существует. Поэтому определим допустимое множество ДСR², в точках которого решение (5) и (6) существует.

Будем говорить, что $(\alpha,\beta) \in DCR^2$, если решение $H(x,\alpha,\beta)$ задачи (5) и (6) существует. Множество D называется допустимым множеством.

Итак, задача состоит в нахождении $(\alpha_0,\beta_0) \in D$ такую, чтобы было $F(\alpha_0,\beta_0) = \min F(\alpha,\beta)$.

Для получения $(\alpha_1,\beta) \in D$ разрешимости (может быть не единственной) поставленной задачи сначала исследуем зависимость $H(x,\alpha,\beta)$ от α и β.

Пусть $(\alpha_1,\beta) \in D$ $(\alpha_2,\beta) \in D$ $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда $H(x,\alpha_1,\beta) \leq H(x,\alpha_2,\beta)$ для всех $x \in [0,L]$.

Для доказательства этого обозначим соответствующие решения через $H_1(x) \equiv H(x,\alpha_1,\beta) H_2(x) \equiv H(x,\alpha_2,\beta)$. Тогда по определению решения $H_1(x) > 0, H_2(x) > 0$ для любого $x \in [0,L]$ и

$$\frac{dH_1}{dx} + \alpha_1 Q \frac{1}{H_1(x)} - \beta Q^2 \frac{1}{H_1^2(x)} = 0$$

$$\frac{dH_2(x)}{dx} - \alpha_2 Q \frac{1}{H_2(x)} + \beta Q^2 \frac{1}{H_2^2(x)} = 0$$

Умножим первое уравнение на $H_1^2(x)$ второе - на, вычтем первое уравнение из второго и после элементарных преобразований $H_2^2(x)$получим:

$$\frac{dH^3}{dx} = P(x)H'(x) + 3QH_1(x)(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{12}$$

где

$$P(x) = -\frac{3\alpha_2 Q}{H_1^2(x) + H_1(x)H_2(x) + H_2^2(x)}$$

и в силу начальных условий H[1] (0)=0.

Тогда решение уравнения (12) дается формулой:

$$H^3(x) = H_2^3(x) - H_1^3(x) = 3Q(\alpha_1 - \alpha_2) \int_0^x H_1(y) e^{\int_y^x P(z)dz} dy > 0$$

для всех $x \in [0,L]$.

Из показанных примеров следует, что если зафиксировать один из параметров α или β а другой параметр растёт, оставаясь в области *D* то соответствующее решение задачи (5) и (6) убывает с ростом отрезка *[0,L]*.

Заметим ещё, что как легко видеть из структуры уравнения (5), если $\alpha > 0, \beta > 0$, то решение задачи (5) и (6) убывает с ростом x, то есть

$$\frac{dH}{dx} \leq 0$$

Иначе говоря, решение $H(x,\alpha,\beta)$ монотонно зависит от α и β. Тогда зафиксировав один из параметров, например β, и изменяя другой, то есть α, можем найти такое его значение, при котором $F(\alpha,\beta)$ из (40) достигает своего минимума (естественно такое значение может быть не единственным). Затем, зафиксировав другое значение первого параметра β, найдём соответствующее значение (или значения) α, доставляющее минимум. Таким образом, в области D существует некая линия (или множество линий) $\beta = f(\alpha)$, на которой $F(\alpha, \beta)$ достигает своей; минимума при каждом фиксированном β. Далее минимизируя $F(\alpha, \beta)$ на этих линиях находим искомое значение (α, β).

Для этого, учитывая сказанное в предыдущем пункте, займёмся отысканием (хотя бы приближённо) линии $\beta = f(\alpha)$.

Умножим уравнения (4) и (5) на $H(x)$ и на $H^2(x)$

$$H(x)\frac{dx(x)}{dx} + \alpha Q + \beta Q^2 \frac{1}{H(x)} = 0$$

и

$$H^2(x)\frac{dx(x)}{dx} + \alpha Q H(x) + \beta Q^2 - 0$$

и проинтегрируем полученные уравнения по x от нуля до x с учётом (6)

$$H^2(x) - H_0^2 + 2\alpha Q x + 2\beta Q^2 \int_0^x \frac{dx}{H(x)} = 0 \quad (13)$$

и

$$H^3(x) - H_0^3 + 3\alpha Q \int_0^x H(x)dx + 3\beta Q^2 x = 0 \quad (14)$$

Заметим, что в силу (3.14) $V(x) = Q/H(x)$, и тогда из уравнений (13) и (14) получим:

$$\int_0^x v(x)dx = \frac{H_0^2 - H^2(x)}{2\beta Q} - \frac{\alpha}{\beta}x \quad (15)$$

и

$$\int_0^x H(x)dx = \frac{H_0^3 - H^3(x)}{3\alpha Q} - \frac{\beta Q}{\alpha}x$$

или

$$\frac{1}{x}\int_0^x v(x)dx = \frac{H_0^2 - H^2(x)}{2\beta Q} - \frac{\alpha}{\beta}x$$

и

$$\frac{1}{x}\int_0^x H(x)dx = \frac{H_0^3 - H^3(x)}{3\alpha Q x} - \frac{\beta Q}{\alpha} \quad (16)$$

В левой части (9) стоит среднее значение $V_{cp}(x)$ скорости фильтрации $V(x)$ на интервале $[0, x]$, а в левой части (16) - среднее значение $H_{cp}(x)$ напора $H(x)$ на $[0, x]$.

Учитывая, что любое $x \in [0, L] H(x)V(x) = Q$ примем гипотезу:

$$H_{cp}(x)V_{cp}(x) = Q \quad (17)$$

Подставляя в (15) выражения H_{cp} V_{cp} из (16) и (17) имеем:

$$\left(\frac{H_0^2 - H^2(x)}{\alpha\beta Q x} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{H_0^3 - H^3(x)}{3\alpha\beta Q} - \frac{\beta Q}{\alpha}\right) = Q$$

или после элементарных преобразований приходим к равенству:

$$\frac{3Q^2 x}{H_0^3 - H^3(x)} \cdot \beta + \frac{2Qx}{H_0^2 - H^2(x)}\alpha = 1 \quad (18)$$

Таким образом, в задачах (5) и (6) α и β между собой связано уравнением (18). Это уравнение, нужно отметить, приближённое, так как оно получено из гипотезы (17), которая выполняется не всегда точно. Тем не менее, в некоторых частных случаях оно дает точное решение.

Теперь, для определения α и β, отвечающих экспериментальным данным достаточно взять любые две данные x_1, x_2, $H(x_1)$, $H(x_2)$ и подставляя их в уравнение (18) получим два уравнения относительно α и β. Рекомендуется в качестве одного из данных взять $x_n=L$ и $H_n=H(L)$, то есть точное решение задачи, конечную точку фильтрации. Здесь и появляется сказанная выше зависимость α и β от L. Тогда формула (18) примет более конкретный вид:

$$\frac{3Q^2L}{H_c^2-H_k^2}\beta+\frac{2QL}{H_c^2-H_k^2}\alpha=1. \tag{19}$$

В случае, когда $\beta=0$ формула (18) даёт для а формулу (19) или формулу (8) для $H(x)$, то есть точное решение задачи (5) и (6). В другом частном случае, когда $\alpha=0$ из (18) мы получаем формулу (18) для $H(x)$, то есть и в этом случае формула (18) является точной.

Литература:

1. Арье А.Г. Физические основы фильтрации подземных вод. Москва, «Недра»
2. Гавич И.К. Гидродинамика. Москва, «Недра», 1983 г.
3. Бер Я., Заславский Д., Тирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. Москва, «Мир», 1971 г.
4. Мироненко В.А. Динамика подземных вод. Москва «Недра», 1983 г.
5. Полубаринова –Кочина П.Н. Теория движения грунтовых вод. Москва, «Наука», 1977 г.

Рецензент: д.тех.н., профессор Мукенов Р.Н.