Байманкулов А. Т.

ИТЕРАЦИОННАЯ РАСЧЕТНАЯ СХЕМА В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОГРАДИЕНТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ГРУНТА

A. T. Baymankulov

THE ITERATIVE CALCULATION SCHEMES IN PROBLEMS OF A CERTAIN TEMPERATURE GRADIENT FACTOR OF SOIL

УДК:519.62:624.131

В работе, на основе изучения задачи распространения влаги в грунте и заданной температуры грунта на поверхности земли, предлагается метод определения лгермоградиентного коэффициента грунта. Получены априорные оценки для решения прямой и сопряженной задачи и доказаны сходимость итерационного процесса.

The paper suggests the method for determining the thermo-gradient coefficient of soil on studying the spread of moisture in the soil and the given temperature on the surface of soil. Apriori estimates for the solution of the direct and the dual problem were got and the convergence of the iterative process was proved.

1.Постановка задачи.

Передвижение влаги может осуществляться в грунте или в результате фильтрации, или в результате миграции. Мартынов Г.А., Глобус А.М. [1,2] и другие ученые доказали, что механизм движения в обоих случаях совершенно одинаков, хотя силы, вызывающие его, различны. В настоящей работе описывается один метод с помощью, которого определяется термоградиентный коэффициент однородного грунта. Решение некоторой обратной задачи распространения тепла и влаги изучены в работе [3].

Система дифференциальных уравнений описывающие конвективное распространение влаги и тепла в однородной среде записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\\ &\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} 0<z<H, \tag{1}$$

где C — коэффициент теплоемкости, λ — коэффициент теплопроводности, κ — коэффициент влагопроводности, γ_0 – удельная масса грунта. μ — термоградиентный коэффициент. На поверхности земли с воздухом справедливо закон сохранения энергий

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\alpha(\theta-T_b)\big|_{z=H}=0$$

Для того чтобы определить коэффициент теплопроводности однородного грунта дополнительно задается температура на поверхности земли

$$\theta(H,t)=\theta_1(t),\quad 0<t<T$$

С учетом этого равенство условие на поверхности земли записывается в виде

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\alpha(\theta_1(t)-T_b)\big|_{z=H}=0 \tag{2}$$

где α – коэффициент теплоотдачи грунта в окружающую среду. Установлено, что на определенной глубине земли температура грунта остается постоянной величиной. Используя этот факт, ставится граничное условие

$$\theta(0,t)=T_1=const \tag{3}$$

Отметим, что ось Oz направлено вертикально вверх. В начальный момент времени, при $t=0$ распределение температуры в грунте задается, т.е.

$$\theta(z,0)=\theta_0(z), \quad 0\le z\le H \tag{4}$$

На поверхности земли и на глубине $z=H$ ставятся граничные условия для влаги

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial z}\right|_{z=H}=A(t), \quad \omega\big|_{z=0}=\omega_2 \tag{5}$$

В момент времени $t=0$ задается распределения температуры и влаги

$$\theta(0,z)=\theta_0(x), \quad \omega(0,z)=\omega_0(z) \tag{6}$$

2. Сопряженная задача

Пусть задано μ_n. Следующее приближение определяется из минимума функционала

$$J(\lambda)=\int_0^T[\theta(H,t,\lambda)-\theta_1(t)]^2\,dt$$

Для последовательных значений термоградиентного коэффициента μ_n, μ_{n+1} справедливо второе уравнение системы (1)

$$\frac{\partial\omega^{n+1}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\omega^{n+1}}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu_{n+1}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\omega^{n}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\omega^{n}}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu_{n}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$$

Обозначив $\delta\omega=\omega^{n+1}-\omega^n$ получим уравнение

$$\frac{\partial\delta\omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\delta\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu_n\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+k\delta\mu\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right) \tag{7}$$

Умножим (7) на произвольную функцию $\psi(z,t)$ и интегрируем по области $Q=(0,H)\times(0,T)$. После однократного интегрирования по частям получим

$$\int_0^H\psi(z,T)\delta\omega(z,T)dz-\int_0^H\psi(z,0)\delta\omega(z,0)dz-\int_0^H\int_0^T\delta\omega\frac{\partial\psi}{\partial t}dzdt=$$

$$=\int_0^T\psi\kappa\left.\frac{\partial\delta\omega}{\partial z}\right|_{z=0}^{z=H}dt-\int_0^T\int_0^H k\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\omega}{\partial z}dzdt+\int_0^T\psi\left.\left(k\mu_n\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+k\delta\mu\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\right)\right|_{z=0}^{z=H}dzdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^H k\mu_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}dzdt-\int_0^T\int_0^H k\delta\mu\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dzdt$$

Полагаем, что

$$\psi(z,T)=0,\quad \psi(0,t)=0$$

и еще раз, интегрируя по частям, получим равенство

$$-\int_0^H\int_0^T \delta\omega\frac{\partial\psi}{\partial t}dzdt=-\int_0^T k\mu\delta\omega\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=0}^{z=H}+\int_0^T\int_0^H\delta\omega\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dzdt-\int_0^T\int_0^H k\delta\mu\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dzdt-$$

$$-\int_0^T\delta\theta\mu_n k\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=0}^{z=H}dt+\int_0^T\int_0^H\delta\theta\left(k\mu_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)dzdt$$

Если положим

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0 \quad \text{и} \quad k\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=H}=-2(\theta(H,t)-\theta_1(t)),$$

то получится равенство

$$2\int_0^T\delta\theta(H,t)(\theta(H,t)-\theta_1(t))dt=\int_0^T\int_0^H k\delta\mu\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dzdt-\int_0^T\int_0^H\delta\theta\left(k\mu_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)dzdt$$

В ходе изложения получили сопряженную задачу

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0 \tag{8}$$

$$\psi(z,T)=0,\quad \psi(0,t)=0\qquad k\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=H}=-2(\theta(H,t)-\theta_1(t))$$

3. Минимизирующий функционал

Значение термоградиентного коэффициента определяется из минимума функционала

$$J(\mu)=\int_0^T(\theta(H,t)-\theta_1(t))^2\,dt$$

Рассуждая так же, как в работе [6] получим равенство

$$J(\mu_{n+1})-J(\mu_n)=-\int_0^T(\delta\theta)^2\,dt+\int_0^T\int_0^H k\delta\mu\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dzdt-\int_0^T\int_0^H\delta\theta\left(k\mu_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)dzdt$$

Первое и третье слагаемое в правой части являются достаточно малыми величинами второго порядка. Поэтому получим равенство

$$\nabla J=\int_0^H\int_0^T k\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}dzdt \quad \text{и} \quad \mu_{n+1}-\mu_n=-\beta\int_0^H\int_0^T k\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}dzdt$$

4. Алгоритм решения задачи

4.1.Задается начальное приближение термоградиентного коэффициента μ_n

4.2. Решается прямая задача (1)-(6) и определяются $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ и $\theta(H,t)$.

4.3. Решается сопряженная задача (8) и определяется $\frac{\partial\psi}{\partial z}$.

4.4. Определяется следующее приближение μ_{n+1}

5. Доказанные теоремы

Теорема 1. Если $\theta_1(t), A(t), T_b(t) \in C^1(0,T)$ и $\theta_0(z), \omega_0(z) \in L(0,H)$, то для решения задачи (1)-(6) справедливо оценка

$$\max_t \|\theta^n\|^2 + \int_0^T \left\| \sqrt{\lambda_n} \frac{\partial \theta^n}{\partial z} \right\|^2 dt \le C_1 < \infty$$

$$\max_t \max_z |\theta(z,t)| = M < \infty$$

Теорема 2. Если $\theta_1(t), A(t), T_b(t) \in C^1(0,T)$ и $\theta_0(z), \omega_0(z) \in L(0,H)$, то для решения задачи (8) справедливо оценка

$$\max_t \int_0^H \psi^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^H k\mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz dt \le C_2$$

Теорема 3. Если имеют место теоремы 1 и теоремы 2, то $|\nabla J(\mu)| \le C_3$.

Список литературы:

1. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокриологии. - М.: 1959, под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI стр. 153-192
2. Глобус А.М. Физика неизотермического внутрипочвенного влагообмена. -Л., Гидрометиздат, 1983, 279 с.
3. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ, 2008, №1, ст. 62-65
4. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т. Приближенный метод определения термоградиентного коэффициента однородной среды. // Вестник НАН РК, 2008, №4, ст. 3-5.
5. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т. Приближенный метод определения термоградиентного коэффициента однородной среды// ДАН НАН РК, 2008, №4, ст. 3-5.
6. БайманкуловА.Т.,Рысбайулы Б.Численное определение коэффициента диффузии почвенной воды// Вестник КБТУ, 2009, №1(12), С.28-33
7. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water. // International Journal of Academic Research, № 5, 2010
8. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т. Вариационно-разностный метод определения коэффициента влагопроводности почвы с учетом изменения температуры// Вестник НА11 РК,2010, №4, с. 12-15.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Жээналиев М.А.