Канетов Б.Э.

КОНЕЧНО-ЗВЕЗДНЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

B.E. Kanetov

FINITE-STAR UNIFORM SPACE

УДК: 515.12

Бул илимий макалада чектуу-жылдыздуу бир калыптагы мейкиндиктер киргизилген жана изилденген.

В данной статье вводятся и исследуются конечно-звездные равномерные пространства.

In this paper star-finitely uniform spaces are introduced and studied.

В данной статье все равномерные пространства предполагаются отделимыми, а отображения равномерно непрерывными.

Пусть α - конечное семейство подмножеств множества X и $x \in X$. Положим $St(x,\alpha) = \{A \in \alpha : x \in A\}$. Тогда $\alpha_к(x) = \cup St(x,\alpha)$ и называется конечно-звездной точки x. Семейство α называется конечно-звездным, если оно состоит из конечных-звезд всех точек $x \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Равномерное пространство (X,U) называется конечно-звездным равномерным пространством, если равномерность U имеет базу состоящую из конечно-звездных покрытий.

Всякое предкомпактное равномерное пространство является конечно-звездным равномерным пространством, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно, например, дискретное равномерное пространство является конечно-звездным равномерным пространством, но не является предкомпактным равномерным пространством.

ТЕОРЕМА 1. Любое подпространство конечно-звездного равномерного пространства конечно-звездное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - конечно-звездное равномерное пространство, а (M,U_M) его подпространство. Пусть $\alpha_M \in U_M$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует такое равномерное покрытие $\alpha \in U$, что $\alpha \wedge \{M\} = \alpha_M$. В покрытие α впишем конечно-звездное покрытие $\beta \in U$. Заметим, что след β_M покрытия β будет конечно-звездным покрытием. Следовательно, покрытие β_M вписано в покрытие α_M. Значит, (X,U) - конечно-звездное пространство.

ТЕОРЕМА 2. Всякая сумма конечно-звездных равномерных пространств конечно-звездна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{(X_a,U_a) : a \in M\}$ - произвольное семейство конечно-звездных равномерных пространств (X_a,U_a), а $(\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_a)$ - сумма конечно-звездных равномерных пространств. Рассмотрим произвольное равномерное покрытие α пространства $(\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_a)$. Для каждого $a_0 \in M$ положим $\beta_{a_0} = \{X_{a_0} \cap A : a_0 \in M, A \in \alpha\}$. Ясно, что оно является равномерным покрытием пространства (X_{a_0},U_{a_0}), и поэтому существует конечно-звездное равномерное покрытие $\gamma_{a_0} \in U_{a_0}$, вписанное в β_{a_0}. Далее рассмотрим семейство γ, являющее объединением всех семейств γ_a, $a \in M$. Очевидно, семейство γ является равномерным покрытием пространства $(\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_a)$ и оно вписано в α. Легко видеть, что γ конечно-звездное покрытие.

ТЕОРЕМА 3. Пополнение $(\widetilde{X},\widetilde{U})$ конечно-звездного равномерного пространства (X,U) конечно-звездное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) конечно-звездное равномерное пространство и $(\widetilde{X},\widetilde{U})$ его пополнение. Пусть $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{U}$ - произвольное равномерное покрытие. Положим $\widetilde{\alpha} \wedge \{X\} = \alpha$. Ясно, что $\alpha \in U$. Пусть конечно-звездное равномерное покрытие $\beta \in U$ вписанное в покрытие $\alpha \in U$. Тогда покрытие $\beta \in U$ продолжается до равномерного покрытия $\widetilde{\beta} \in \widetilde{U}$ пополнения $(\widetilde{X},\widetilde{U})$. Из конструкции пополнения равномерного пространства легко следует, что $\widetilde{\beta}$ является τ - звездным равномерным покрытием, вписанным в $\widetilde{\alpha}$.

Напомним некоторые понятия из монографии [1].

Равномерное пространство (X,U) называется вполне ограниченным, если для любого равномерного покрытия $\alpha \in U$ существует такое конечное множество $A \subset X$, что $\alpha(A) = X$.

Равномерно непрерывное отображение f равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется предкомпактным, если для любого равномерного покрытия $\alpha \in U$ существуют такие равномерное покрытие $\beta \in V$ и конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ называется равномерно совершенным, если оно предкомпактно и непрерывное отображение $f:(X,\tau_U) \to (Y,\tau_V)$ совершенно. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ является равномерно совершенным тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и полно. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ называется полным, если всякий фильтр Коши F в (X,U), для которого fF сходится в (Y,V), сходится в (X,U).

Равномерно непрерывное отображение f равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно открытым, если отображение f переводит каждое открытое покрытие $\alpha \in U$ в открытое покрытие $f\alpha \in V$.

Система Σ покрытий множества X называется направленной, если для любых двух покрытий $\alpha,\beta \in \Sigma$ существует такое покрытие $\gamma \in \Sigma$, что покрытие γ вписано в покрытие $\alpha \wedge \beta$. Направленная система Σ покрытий множества X называется квазибазой равномерного пространства (X,U) или равномерности U, если выполняется условие: нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X содержится в равномерности U тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\sigma_n\}$ покрытий из системы Σ такая, что покрытие σ_n вписано в покрытие α_n для каждого $n \in N$.

Равномерно непрерывное отображение f равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно факторным, если V - сильнейшая равномерность среди всех равномерностей на Y, при которых отображение f равномерно непрерывно.

Равномерное пространство (X,U) называется нульмерным, если оно имеет базу состоящую из дизъюнктных покрытий.

Система ξ подмножеств множества X называется счетно центрированной, если $\xi_o \subset \xi$ - счетное подсемейство, то $\cap\{P : P \in \xi_0\} \neq \varnothing$. Равномерное пространство (X,U) называется слабо полным, если всякий счетно центрированный фильтр Коши F в (X,U) сходится.

Следующая теорема является спектральной характеристикой конечно-звездных равномерных пространств.

ТЕОРЕМА 4. Равномерно открытый равномерно совершенный образ и прообраз конечно-звездного равномерного пространства, конечно-звезден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta \in V$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует конечно-звездное равномерное покрытие $\alpha \in U$, вписанное в равномерное покрытие $f^{-1}\beta$. По условию $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно открытое равномерно совершенное отображение, поэтому, $f\alpha$ является конечно-звездным равномерным покрытием пространства (Y,V), вписанное в β. Следовательно, (Y,V) - конечно-звездное равномерное пространство.

Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно открытое равномерно совершенное отображение и равномерное пространство (Y,V) - конечно-звездно. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда в силу равномерной совершенности отображения f, существуют конечно-звездное равномерное покрытие $\beta \in V$ и конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ - конечно-звездное равномерное покрытие. Итак, (X,U) - конечно-звездное равномерное пространство.

Всякое конечно-звездное равномерное покрытие обладает следующими свойствами:

1) Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Если $\alpha \in U$ - конечно-звездное равномерное покрытие и се-

мейство $f^{\#}\alpha = \{f^{\#}A : A \in \alpha\}$ является равномерным покрытием равномерного пространства (Y,V), то покрытие $f^{\#}\alpha$ также является конечно-звездным равномерным покрытием.

2) Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Если $\beta \in V$ конечно-звездное равномерное покрытие, то $f^{-1}\beta \in U$ также является конечно-звездным равномерным покрытием.

ТЕОРЕМА 5. Равномерное пространство (X,U) является конечно-звездным и слабо полным, тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) является пределом обратного спектра, составленного из конечно-звездных равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений «на».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть равномерное пространство (X,U) конечно-звездно и слабо полно. Ясно (см. [1], стр. 64), что равномерное пространство (X,U) является пределом обратного спектра $\{(X_a,U_a),h_a^b,M)\}$, составленного из равномерных пространств (X_a,U_a) и равномерно непрерывных отображений «на» h_a^b. Пусть B-база равномерности U, состоящая из звездно-конечных покрытий. Пусть N_a- база равномерности U_a. Тогда $f_a^{-1}N_a \subset U$, где f_a- равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (X_a,U_a). Для любого $\alpha \in f_a^{-1}N_a$ выберем такое $\beta(\alpha) \in B$, что $\beta(\alpha) \succ \alpha$. Положим $B_1 = \{\beta(\alpha) : \alpha \in f_a^{-1}N_a\}$.

Пусть определены $B_1, B_2, ..., B_m$.

Тогда $B_{m+1} = \{\gamma(\beta_1,\beta_2) \in B : \gamma(\beta_1,\beta_2) \succ \beta_1 \wedge \beta_2, \beta_1,\beta_2 \in B_m\}$. Пусть $B'_a = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$. Тогда B'_a является счетной базой некоторой псевдоравномерности U'_a и $f_a^{-1}U_a \subset B'_a$. Можно легко построить равномерное пространство (X'_a,U'_a). По условию 1) оно является конечно звездным равномерным пространством. Следовательно, множество $M' = \{a \in M :$пространство (X_a,U_a) является конечно-звездным$\}$ является конфинальной части множества M. Итак, равномерное пространство (X,U) является пределом обратного спектра, составленного из конечно-звездных равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений «на».

Достаточность легко следует из условия 2) и предложения 1.4.9 (см. [1], стр. 63).

ТЕОРЕМА 6. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны

1. Равномерное пространство (X,U) имеет квазибазу Σ, состоящую из конечно-звездных покрытий;
2. Равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного равномерного пространства (Y,V) при равномерно факторном отображении f таком, что подпространство $(f^{-1}x, V_{f^{-1}x})$ равномерного пространства (Y,V) предкомпактно для каждого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \Rightarrow 2)$. Пусть равномерное пространство (X,U) имеет квазибазу Σ, состоящую из конечно-звездных покрытий. Через A обозначим множество всех внутренних пересечений всевозможных конечных подсемейств $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\} \subset \Sigma$. Очевидно, A также является квазибазой равномерности U. Каждое покрытие $\alpha \in A$ наделим дискретной равномерности и рассмотрим произведение равномерных пространств $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha) : \alpha \in A\}$. Для $\xi \in \prod\{(X_\alpha,U_\alpha) : \alpha \in A\}$ через ξ_α мы обозначим α-ю координату точки ξ. Назовем точку $\xi \in \prod\{(X_\alpha,U_\alpha) : \alpha \in A\}$ отмеченной, если множество $\cap\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ состоит ровно из одной точки, обозначаемой через $\{x\}$. Пусть $Y = \{\xi \in \prod\{(X_\alpha,U_\alpha) : \alpha \in A\} : \xi -$отмеченная точка$\}$ подмножество пространства $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha) : \alpha \in A\}$.

Положим $O(A^\circ_{\alpha_1}, A^\circ_{\alpha_2}, ..., A^\circ_{\alpha_n}) = \{\xi \in Y : \xi = \{A_\alpha : \alpha \in A\}, A_{\alpha_i} = A^\circ_{\alpha_i}, i = 1,2,...,n\}$. Заметим, что $\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n} = \{O(A^\circ_{\alpha_1}, A^\circ_{\alpha_2}, ..., A^\circ_{\alpha_n}) : A^\circ_{\alpha_1} \in \alpha_1, A^\circ_{\alpha_2} \in \alpha_2, ..., A^\circ_{\alpha_n} \in \alpha_n\}$-дизъюнктное покрытие пространства

(Y,V) и система $B=\{\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}:\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}\subset A\}$ -база равномерности V индуцированной равномерности из $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha\in A\}$. Каждой точке $\xi=\{A_\alpha:\alpha\in A\}$ поставим в соответствие такую единственную точку $x\in X$, что $\{x\}=\cap\{A_\alpha:\alpha\in A\}$. Ясно, что такое отображение является сьюрективным. Легко видеть, что отображение f нульмерного равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (X,U) равномерно факторно. Так как квазибаза A состоит из конечно-звездных покрытий, то $St(x,\alpha)$ состоит из конечного числа элементов для любого $\alpha\in A$. Ясно, что $f^{-1}x=\prod\{St(x,\alpha):\alpha\in A\}$ для любого $x\in X$. Легко видеть, что пространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ предкомпактно для каждого $x\in X$, как произведение дискретных предкомпактных пространств.

$2)\Rightarrow 1)$. Пусть f равномерно факторное отображение нульмерного равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (X,U) и прообраз каждого $x\in X$ предкомпактен. Так как равномерное пространство (Y,V) нульмерно, то оно имеет базу A состоящую из дизъюнктных покрытий. В силу факторности, ее образ является квазибазой равномерного пространства (X,U). Так как след каждого дизъюнктного покрытия $\alpha\in A$ на $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ предкомпактно, то fA состоит из конечно-звездных покрытий.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны

1. Равномерное пространство (X,U) имеет счетную квазибазу Σ, состоящую из конечно-звездных покрытий;
2. Равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного метрического пространства Y при равномерно факторном отображении f таком, что подпространство $f^{-1}x$ метрического пространства Y вполне ограничено для каждого $x\in X$.

ТЕОРЕМА 7. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны

1. Равномерное пространство (X,U) является конечно-звездным пространством;
2. Равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного равномерного пространства (Y,V) при равномерно открытом отображении f таком, что подпространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ равномерного пространства (Y,V) вполне ограничено для каждого $x\in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - конечно-звездное равномерное пространство. Пусть A база равномерности U состоящая из конечно-звездных равномерных покрытий. Ясно, что внутренне пересечение любого конечного числа элементов из A снова является элементом A. Аналогично построим нульмерное равномерное пространство (Y,V) и отображение f. Отображение f является равномерно открытым, так как образ $\wedge\alpha_i$ каждого открытого равномерного покрытия $\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}$ является равномерным. Легко видеть, что $f^{-1}x$ -вполне ограничено для каждого $x\in X$. Обратно, пусть f - такое равномерно открытое отображение нульмерного равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (X,U), что подпространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ вполне ограничено для каждого $x\in X$. Так как пространство (Y,V) имеет базу состоящую из дизъюнктных открытых равномерных покрытий, то ее образ образует базу равномерного пространства (X,U). Легко видеть, эта база состоит из конечно-звездных покрытий.

Литература:

1. Борубаев А.А.Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990, 172 с.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства. Фрунзе, КГУ, 1987, 75 с.
3. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные пространства. Бишкек, Учкун, 2003, 245 с.
4. Borubaev A., Pankov P., Chekeev A. Spaces uniformed by coverings. Printed in Hungary by Korrekt Nyoumdaipari Kft., 2003, 169 p.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986, 657 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Чекеев А.А.