

Курбаналиев А.Ы.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

A.Y. Kurbanaliev

SIMULATION OF GAS-LIQUID MIXTURE FREE BOUNDARY

УДК: 515.2/74.3

В данной работе рассматриваются некоторые аспекты численного моделирования движения столба вязкой несжимаемой жидкости под действием силы тяжести.

This paper discusses some aspects of numerical simulation of the motion of a viscous incompressible fluid column by gravity.

Нестационарная система осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, дискретизируется на неподвижной декартовой сетке с использованием метода контрольных объемов. Численное моделирование основано на двухфазном алгоритме `interFoam` пакета `OpenFOAM 1.7.1`, использующего метод `volume of fluid (VOF)` для определения межфазной границы. Адекватность математической модели и достоверность полученных численных результатов проверяются путем сравнения с соответствующими экспериментальными данными. Для постановки граничных условий на твердых стенках использовался метод пристеночных функций. Учет турбулентных пульсаций базировался на стандартной k - ε -модели турбулентности.

Уравнения сохранения

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, описывающие трехмерное течение несжимаемой вязкой жидкости со свободной поверхностью, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u'_i u'_j}) + \sigma k \frac{\partial s}{\partial x_i} \bigg/ \left| \frac{\partial s}{\partial x_i} \right|$$

где u_i - компонент средней скорости в направлении x_i , ρ - плотность, p - среднее давление, кинематическая вязкость, σ - коэффициент поверхностного натяжения, k - кривизна поверхности. Усреднение производится по времени, а штрих означает флуктуационную часть. В принятой модели турбулентности используется приближение Буссинеска, согласно которому напряжения Рейнольдса - $\overline{u'_i u'_j}$ аппроксимируются при помощи следующей формулы:

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

где $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ и $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ - турбулентная вязкость. Кинетическая энергия турбулентности k и скорость ее диссипации ε определяются из следующих транспортных уравнений:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t S^2 - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} v_\tau S^2 - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

где $S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, коэффициенты модели имеют следующие стандартные значения:

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{1\varepsilon} = 1.44, \quad C_{2\varepsilon} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Свободная граница.

Характерной особенностью данной задачи является переходное газожидкостное течение с резкой фазовой или свободной границей. Используемый двухфазный алгоритм `interFoam` пакета `OpenFOAM 1.7.1` [1] основан на методе `volume of fluid (VOF)`, в котором уравнение переноса скалярной величины s используется для определения относительной объемной доли несжимаемой фазы в каждой расчетной ячейке:

$$s(x, y, z, t) = \begin{cases} 1, & \text{если контрольный объем занят водой,} \\ 0, & \text{если контрольный объем занят воздухом,} \\ 0 < s < 1, & \text{если контрольный объем занят смесью воды и воздуха} \end{cases}$$

Поэтому, физические свойства газожидкостной смеси определяются усреднением с соответствующим весовым коэффициентом:

$$\begin{aligned} \rho &= s\rho_1 + (1-s)\rho_2 \\ \mu &= s\mu_1 + (1-s)\mu_2 \end{aligned}$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют жидкой и газовой фазе соответственно.

Суть метода `volume of fluid (VOF)` заключается в том, что граница раздела двух фаз не вычисляется явно, но до некоторой степени, определяется как свойство поля объемной доли воздуха. Так как значения объемной доли заключены между 0 и 1, фазовая граница не определяется точно, однако, занимает некоторую область, где поблизости должна существовать резкая межфазная граница.

Положение свободной границы определяется уравнением:

$$s(x, y, z, t) = 0.$$

Изменение свободной поверхности во времени определяется следующим скалярным уравнением переноса:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_i \frac{\partial s}{\partial x_i} = 0$$

Начальные значения

Для нестационарной задачи необходимо задание начальных значений всех зависимых переменных. Значение всех компонент скорости равны нулю, так как по условию рассматриваемой задачи до момента времени $t = 0$ движение отсутствовало. Давление тоже равно нулю. Кинетическая энергия турбулентности и скорость её диссипации имеют некоторое малое значение, которое обеспечивает хорошую сходимость численного решения на первых шагах интегрирования.

Граничные условия

На твердых стенках расчетной области задано условие прилипания, что дает условие равенства нулю всех компонент вектора скорости. Для давления и объемной доли воздуха заданы условия непроницаемости (условие Неймана - $\nabla p = 0$ и $\nabla s = 0$); для кинетической энергии турбулентности k и скорости её диссипации ε граничные условия задавались при помощи аппарата пристеночных функций. Влияние сил поверхностного натяжения между твердой стенкой и газожидкостной смесью в данной работе не учитывалось.

На свободной границе заданы нулевые значения для давления, объемной доли воздуха и всех компонент скорости.

Дискретизация расчетной области получается методом контрольных объемов, который обеспечивает строгое соблюдение законов сохранения, и основные понятия метода напрямую соответствуют физическим величинам таким, как массовый расход, поток, и т.д. [2].

Дискретизация основных уравнений.

В таблице 1 приведены схемы для дискретизации временных, конвективных и диффузионных членов.

Таблица 1.

Схемы дискретизации

Уравнение	Производная по времени	Конвективный член	Диффузионный член
Момента импульса	Euler	Gauss linear	Gauss linear corrected
Объемной доли воздуха	Euler	Gauss vanLeer	Gauss linear corrected
Кинетическая энергия турбулентности, k	Euler	Gauss upwind	Gauss linear corrected
Скорость диссипации энергии турбулентности, ε	Euler	Gauss upwind	Gauss linear corrected

В таблице 2 приведены сведения о решателях, использованных в данной работе.

Таблица 2.

Решатели уравнений для основных переменных

Уравнение	Решатель	Точность
Коррекция давления	метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, PCG	1e-10
Давление	метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, PCG	1e-7
Скорость	метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием, PBiCG	1e-6
Кинетическая энергия турбулентности, k	метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием, PBiCG	1e-6
Скорость диссипации кинетической энергии, ε	метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием, PBiCG	1e-6

Для связи уравнений скорости и давления использован метод PISO.

Течение, возникающее после разрушения плотины, является удобным примером для проверки достоверности математической модели и численных результатов. В работе [3] приведены экспериментальные данные и результаты численного моделирования простой модели плотины, проведенные в Нидерландском институте морских исследований. В эксперименте использован открытый резервуар длиной 3,22 м с поперечным сечением 1x1 м². Первоначально резервуар был разделен на две неравные части стенкой, расположенной при $x=2$ м. За этой стенкой находится вода высотой 0,55 м, а другая часть резервуара пуста. В этой части резервуара расположен контейнер длиной 40 см с поперечным сечением 16x16 см². Координата левой грани контейнера равна $x=0,67$ м (см. рис. 2.54).

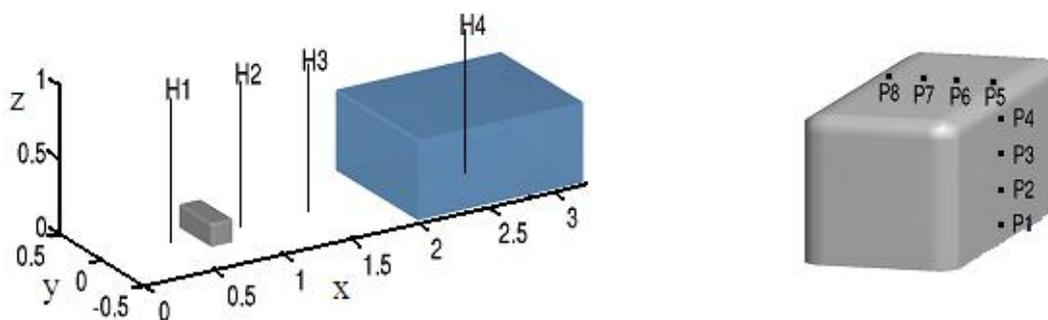


Рис. 1. Расположение измерительных датчиков.

При проведении эксперимента были измерены высота водяного столба и давление жидкости на поверхность контейнера. Расположение измерительных датчиков показано на рис. 1. Были использованы четыре датчика для измерения высоты водяного столба: один (H4) в заполненной водой части, а остальные в другой пустой части резервуара. Координаты этих датчиков были равны $x = 0,5\text{м}$, $1,0\text{м}$, $1,5\text{м}$ и $2,66\text{м}$ соответственно.

Контейнер был снабжен восьмью датчиками давления, четыре на лицевой поверхности в точках с координатами $z = 0,025\text{м}$, $0,063\text{м}$, $0,099\text{м}$ и $0,136\text{м}$, а остальные четыре датчика расположены на верхней стороне контейнера при $x = 0,806\text{м}$, $0,769\text{м}$, $0,733\text{м}$ и $0,696\text{м}$. Датчики на лицевой поверхности расположены на расстоянии $0,026\text{м}$ влево от центральной линии $y = 0$, а датчики на верхней поверхности располагались на расстоянии $0,026\text{м}$ вправо от центральной линии $y = 0$. В эксперименте также была измерена сила, оказываемая на контейнер со стороны потока воды. В целях определения скорости входа воды в пустую часть резервуара, был использован горизонтальный датчик на боковой стенке.

До момента времени $t = 0$ вода находилась в спокойном состоянии. В момент времени $t=0$ мгновенно убиралась разделительная стенка и столб воды, вследствие сила тяжести устремляется в пустую часть резервуара, где находится контейнер. Была использована расчетная сетка $180 \times 60 \times 80$, а продолжительность расчетного времени составляла 6 с. Начальный шаг по времени составлял $0,001$ с, дальше он изменялся в зависимости от числа Куранта, которое было равно $0,85$.

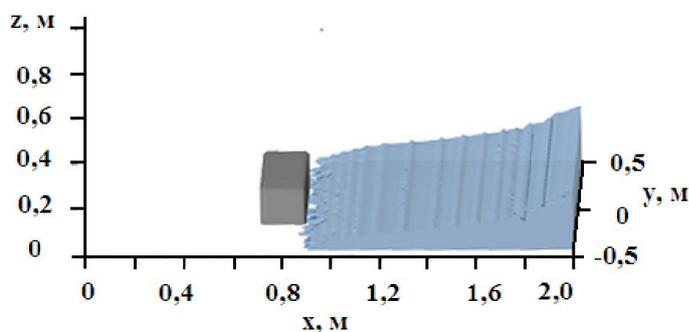


Рис. 2. Сравнение численных и экспериментальных данных для момента времени $t = 0,4$ с.

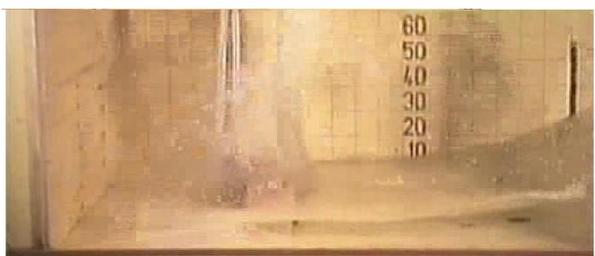
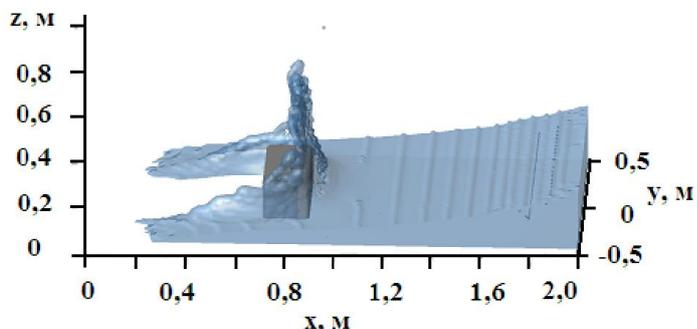


Рис. 3. Сравнение численных и экспериментальных данных для момента времени $t = 0,56$ с.

На рис. 2, 3 представлено сравнение численных и экспериментальных данных для моментов времени $t=0,4$ и $t = 0,56$ соответственно. Справа представлены соответствующие кадры фильма, снятого во время выполне-

ния эксперимента. Можно заметить достаточно хорошее визуальное совпадение численных результатов с экспериментальными данными. Время достижения потока воды контейнера, как в эксперименте, так и при численном моделировании одинаковое. Кроме того, формы свободной поверхности, которые образуются после удара потока об контейнер, тоже совпадают. Однако можно заметить, что при численном моделировании присутствуют некоторые неровности свободной поверхности между водой и окружающей средой – воздухом, которые могут быть устранены путем использования кусочно-линейной реконструкции свободной поверхности [4].

На рис. 4. приведена высота водного потока в двух различных точках: в резервуаре и непосредственной близости контейнера. Соответствие между ними достаточно хорошее, пока вода не вернется от задней стенки после около 1,8 с. После этого наблюдается некоторое несоответствие: численные данные несколько завышены. В момент времени около 5 с, вторичная волна достигает окрестности датчика Н2. Однако при численном моделировании это время равно примерно 5,3 с. Тем не менее, общий характер изменений численных и экспериментальных данных совпадает.

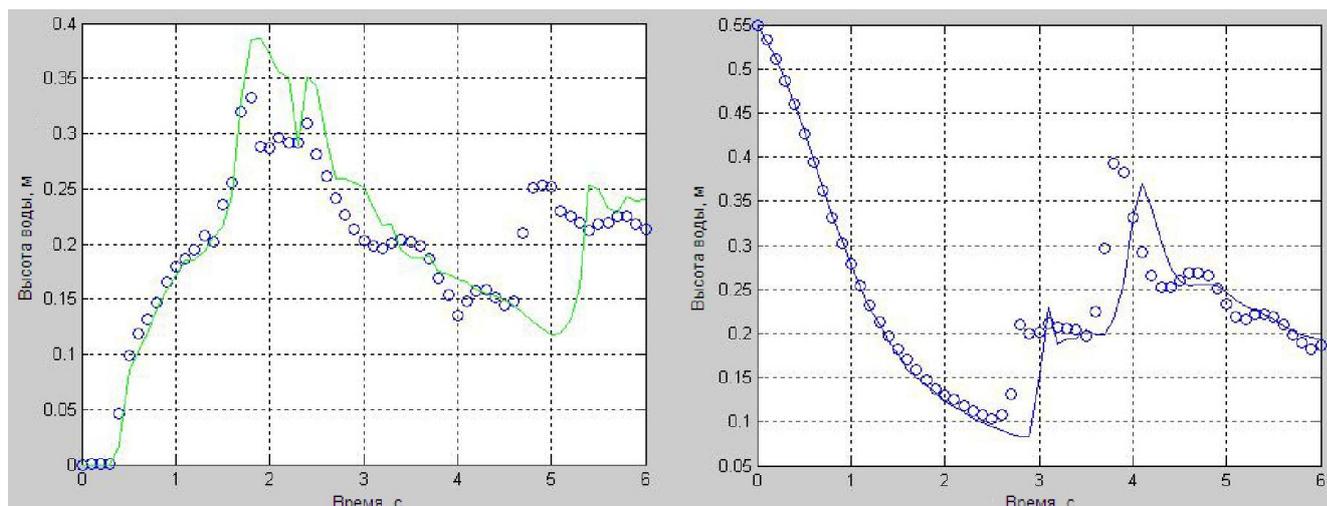


Рис. 4. Высоты водного потока в точках Н2 (слева) и Н4 (справа).

Как видно из рис. 5, момент времени $t = 0,5$ с, когда волна достигает контейнера, предсказан с хорошей точностью, однако величина расчетного давления по сравнению с экспериментальным значением несколько завышена (левый рисунок).

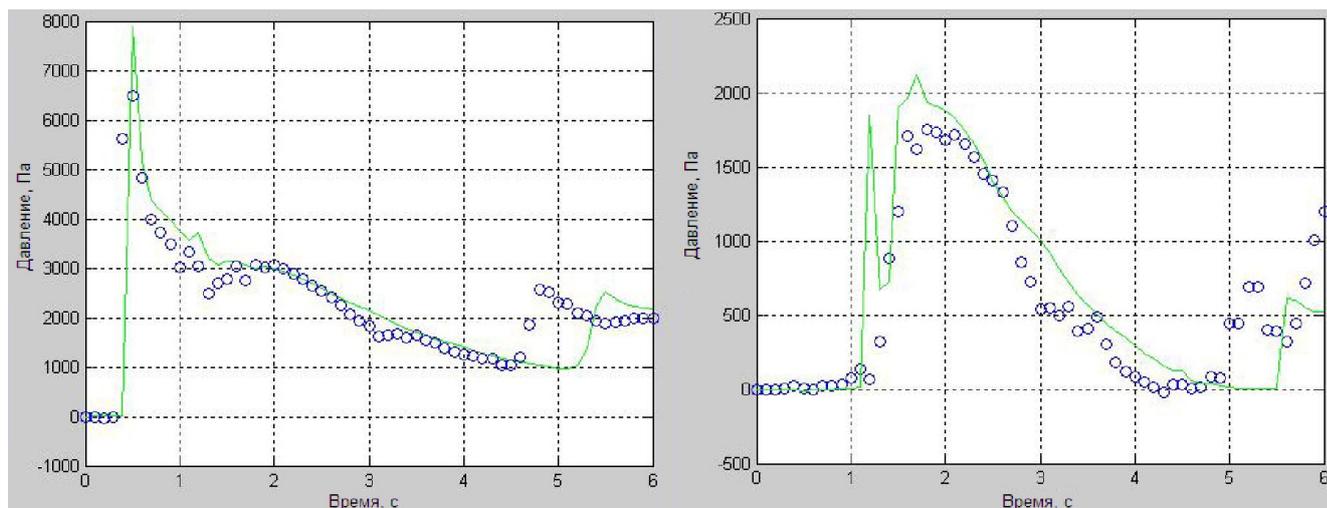


Рис. 5. Давление в точках P2 (слева) и P7 (справа).

Однако по сравнению с экспериментом, численные значения второго максимума давления в точке P2 смещены вправо на 0,6 с., а в точке P7, смещены вправо на 0,3 с. Как показал эксперимент, момент времени, когда поток обратно достигает контейнера (это около 4,7 сек.), хорошо виден на этих рисунках. Кроме этого, при сравнении численных и экспериментальных значений давления в точках P7 (правый рисунок), можно за-

метить некоторые различия. После 1,3 с имеет место небольшое колебание с продолжительностью около 0,2 с, которое не наблюдается в эксперименте. До этой точки вода касается верхней части контейнера, когда волна, идущая от задней стенки, возвращается в эту точку.

Заключение

Трехмерное газожидкостное течение со свободной границей было смоделировано при помощи открытого пакета OpenFOAM. Согласование численных результатов с соответствующими экспериментальными данными достаточно удовлетворительно.

Литература:

- 1) <http://www.openfoam.org/archive/1.7.1/docs/>. OpenFOAM 1.7.1 User's Guide.
- 2) Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. -М.: Энергоатомиздат, 1984.
- 3) K.M.T. Kleefsman, G. Fekken, A.E.P. Veldman, B. Iwanowski and B. Buchner: A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics* volume 206, issue 1, June, 2005, pages 363-393
- 4) D. L. Youngs. An interface tracking method for a 3D hydrodynamic code. Tech. Rep. AWRE/44/92/35, Atomic Weapons Establishment, 1987.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Тайиров М.М.