Бекаев А.

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ

A. Bekaev

ON A NUMERICAL ALGORITHM

УДК: 539.3

Разработан численный алгоритм решения задачи НДС многослойного цилиндра со свойствами зависящими от уровня температуры.

A numerical algorithm for solving the multi-layered cylinder with VAT depending on the properties of the temperature level.

Во многих случаях, детали имеющие форму полого или сплошного многослойного цилиндра, работают под воздействием тепловых нагрузок [1-9]. При этом возникает необходимость учета изменения свойств материала от уровня температуры. Следовательно, нужно разработать численные методы и алгоритмы позволяющие учитывать зависимость свойств материала от температуры, то есть для каждого слоя функции описывающие свойства ститаются функциями температуры. Аппроксимация зависимости физико-механических свойств материала от температуры аналитическими соотношениями для получения решения в квадратурах налагает заметное ограничение на область применения полученного результата и поэтому в разработанном алгоритме физико-механические характеристики материала считаются экспериментально определенными функциями температуры и задаются в виде кривых или таблиц.

Рассматривается многослойный цилиндр из N слоев. R_0 - внутренний радиус, а R_N - внешний ($R_0 \le r \le R_N$). Многослойный цилиндр находится в осесимметричном температурном поле T = T(r). Слои составлены из различных материалов. Материал каждого слоя считается нелинейно-упругим. Материал отдельных слоев имеют коэффициенты Пуассона v^j, коэффициенты линейного расширения α^J (j=1,2…, N), зависящие от уровня температуры. Соотношение

$$v^j = v^j(T), \quad a^j = a^j(T) \tag{1}$$

устанавливаются экспериментально. Секущий модуль сдвига м второго рода находится из диаграммы растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$.

Предполагается, что между слоями выполняются условия жесткого скрепления. Поэтому, в случае осесимметричной деформации

$$u^j(R_j) = u^{j+1}(R_j), \qquad \sigma_r^j(R_j) = \sigma_r^{j-1}(R_j) \tag{2}$$

j = 1, 2, ..., N-l где u^j, σ_r^j - радиальные перемещения и напряжение в j-том слое, R_j - радиус поверхности контакта j-того и (j+l)-ого слоев. На контактных поверхностях (г = R_j) предполагается выполненным равенство температур

$$T^j(R_j) = T^{j+1}(R_j) \tag{3}$$

Уравнения равновесия и кинематические соотношения для j-ого слоя [6]

$$\frac{d\sigma_r^j}{dr} + \frac{\sigma_r^j - \sigma_\varphi^j}{r} = 0, \quad e_r^j = \frac{du^j}{dr}, \quad e_\varphi^j = \frac{u^j}{r} \tag{4}$$

здесь a^1 - кольцевое напряжение, e_r^j, e_φ^j деформации.

Связь между компонентами напряжений $\sigma_r - \sigma_{ср}$, $\sigma_\varphi - \sigma_{ср}$, $\sigma_z - \sigma_{ср}$ соответствующими изменению формы, с компонентами деформации, отвечающими изменению формы, принять в виде |6|

$$e_r - e_{ср} = \frac{(\sigma_r - \sigma_{ср})}{2\mu}, \ldots \tag{5}$$

здесь $e_{ср} = \frac{\sigma_{ср}}{K} + \alpha T$, $K = \frac{E_c}{(1-2v)}$, $E_c -$ секущий модуль. Уравнения (4). (5) приводятся к системе (для любого j-ого слоя), состоящей из двух дифференциальных уравнений

$$\bar{V}' = \{u_1' + u_2'\} = A, \ \bar{V}^j + \bar{b}T \tag{6}$$

и двух алгебраических соотношений $e_{ср} = u_1/r$, $\sigma_\varphi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 T$ (7)

Элементы матрицы A, компоненты вектора $\bar{b}$ и скалярные коэффициенты $c_к$ (к = 1, 2, 3) определяются равенствами

$$a_{11} = -v^1/(1-v^1)r, \ a_{12} = (1-2v^1)/\mu_1^j, \quad a_{21} = -\mu_1^j/(1-v^1)r^2,$$
$$a_{22} = (1-2v^j)/(1-v^1)r, \quad b_1 = (1+v^j)\alpha^j/(1-v^j), \ b_2 = -\mu_1^j(1+v^j)\alpha^j/(1-v^j)r,$$

$$c_1 = \mu_1^j(1-\nu^j)r, c_2 = \nu^j/(1-\nu^j), \ c_3 = -\alpha^j(1+\nu^j)\mu/(1-\nu^j)$$
$$\sigma_z^j = \nu^j(u_2^j + \sigma_\varphi^j) - \mu_1^j(1+\nu^j)\alpha^j T, \ e_z^j = 0$$

при плоской деформации и

$$a_{11} = -\nu^1/(1-\nu^1)r, \ a_{12} = (1-2\nu^1)/\mu_1^j, \ \ a_{21} = -\mu_1^j/(1-\nu^1)r^2,$$
$$a_{22} = (1-2\nu^j)/(1-\nu^1)r, \ \ b_1 = (1+\nu^j)\alpha^j/(1-\nu^j), \ b_2 = -\mu_1^j(1+\nu^j)\alpha^j/(1-\nu^j)r,$$
$$c_1 = \mu_1^j(1-\nu^j)r, c_2 = \nu^j/(1-\nu^j), \ c_3 = -\alpha^j(1+\nu^j)\mu/(1-\nu^j)$$
$$\sigma_z^j = \nu^j(u_2^j + \sigma_\varphi^j) - \mu_1^j(1+\nu^j)\alpha^j T, \ e_z^j = 0$$

для плоского напряженного состояния. Здесь $\mu_1^j = (1-\nu^*)\mu^j/\mu^*$. Для каждого слоя необходимо найти решение системы дифференциальных уравнений (6) с переменными коэффициентами $a_{ij}\,(i,j = 1{,}2)$.

Комбинация всевозможных ipaHH4HbL\ условий на внутренней $r_0 = R_0/R_N$ и внешней $(r_N = 1)$ поверхностях многослойного цилиндра может быть представлена в виде $\bar{\gamma}\bar{V}^1(r_0) = p \quad \bar{\beta}\bar{V}(1) = q$

Например, если $\bar{\gamma} = \{1{,}0\}$ и $\bar{\beta} = \{1{,}0\}$, а p = q = 0, то это означает, что внутренняя и внешняя поверхности цилиндра жестко закреплены.

Для каждого слоя решение системы уравнений (6) находится численно в виде суперпозиции двух линейно-независимых решений задачи Коши. Для этого толщина $R_{j+1} - R_j\ j$ -ого слоя делится на M_1 равных отрезков. Распределение температуры на каждом из отрезков считается линейным и аппроксимируется между заданными ее значениями на концах отрезка. Используя заданные диаграммы растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$ строится кривая $\sigma \sim \varepsilon$ для данного уровня температуры в рассматриваемой точке отрезка ρ_k, ρ_{k+1} $(R_j \le \rho_k < \rho_{k+1} \le R_{j+1})$ и затем находится текущее значение $\mu^j = \mu_c^j$ а из кривых $\nu^j = \nu^j(T), \ \alpha^j = \alpha^j(T)$находятся текущие значения параметров ν^j, α^j. 'Здесь $k = 0{,}1{,}2, \dots, M_{j-1}$.

Найденные значения μ^j, ν^j, α^j для данного уровня температуры позволяют полностью определить компоненты матрицы А, вектора $\bar{b}$ и коэффициенты $c_к$ (К.= 1, 2, 3). Тем самым, в каждой точке отрезка коэффициенты системы уравнений (6), соотношения (7) становятся постоянными.

Для каждого слоя при двух линейно-независимых условиях на внутренней поверхности $r_{j-1} = R_{j-1}/R_N$ методом Рунгс-Кутта [7] численно решается и система линейных дифференциальных уравнений (6) с переменными коэффициентами при заданном по радиусу r распределении температуры $\mathrm{T} = \mathrm{T}(r)$. В результате для j-oro слоя получается два линейно-независимых решения $\bar{V}_1^j, \bar{V}_2^j$. На основе метода линейных комбинаций интегралов, для слоя находится общее решение в виде $\bar{V}^j = C_1^j\bar{V}_1^j + C_2^j\bar{V}_2^j$. Здесь C_k^j -константы (j = 1,2 N. К = 1,2). Количество этих постоянных ' равно 2N. Условия на контактных поверхностях (2) между слоями позволяют установить $2N-2$ алгебраических уравнений относительно постоянных C_k^j. Условия (8), заданные на внутренней $(r_0 = R_0/R_N)$ внешней $(r_N = 1)$ поверхностях, позволяют получить еще два уравнения относительно C_k^j. Таким образом, для определения постоянных интегрирования C_k^j получена замкнутая линейная система, состоящая из 2N алгебраических уравнений:

$$\bar{\gamma}\bar{V}^1(r_0) = p \quad \bar{\beta}\bar{V}(1) = q$$
$$\bar{V}^j(r_j) = \bar{V}^{j+1}(r_j) \quad j = 1{,}2, \dots, N-1$$

Решение этой системы методом Гаусса позволяет определить постоянные C_k^j. Использование для j-oro слоя метода линейных комбинаций интегралов позволяет построить искомое решение u_1^j, u_2^j.

Компоненты напряжений и деформации j-oro слоя (j = 1, 2, ..., N) находятся по формулам (7)-(9).

Установленное напряженно-деформированное состояние j-oro слоя соответствует случаю, когда $\mu^j = \mu_c^j$. Переменный модуль сдвига μ_c^j. найден с помощью кривой $\sigma = f(\varepsilon)$. По расчетным значениям напряжений и деформации вычисляются интенсивности напряжений σ_i, и деформации ε_i соответствующие расчетному случаю плоской деформации или плоского напряженного состояния.

Используя соотношения $\sigma_i = \sigma_r, \varepsilon_i = [2(1+\nu)]\varepsilon_r$из кривой $\sigma = f(\varepsilon)$. находится σ^* соответствующий расчетному значению $\varepsilon_i^{\text{рас}}$. Найденное значение σ^*сравнивается с расчетным значением интенсивности

$\sigma_i^{\text{рас}}$. Если эти значения интенсивности напряжений совпадают, то в соответствии с методом переменных параметров упругости считается, что решение задачи закончено. Если эти числа не совпадают, тогда находится значение параметра $E_{c1}^j = \sigma_1^*/\varepsilon_i^{\text{рас}}$, и задача вновь решается с новым модулем сдвига $\mu^j = \mu_c^j$. При этом как сама диаграмма растяжения, так и параметры должны соответствовать текущему значению температуры. Выше описанным способом расчет повторяется до тех пор, пока не получится соответствие расчетного $\sigma_i^{\text{рас}}$ и экспериментального σ^* значении напряжении.

Предусмотрены возможности реализации всех вариантов граничных условий. Решались задачи для случая плоской деформации и плоского напряженного состояния при различных характеристиках $\nu, \alpha, \sigma_i \sim \varepsilon_i$ от температуры.

Задача решалась для случая плоской деформации и случая плоского напряженного состояния. При решении конкретных задач рассматривались следующие случаи.

а) Модуль сдвига, коэффициенты Пуассона и линейного расширения зависят от температуры. Модуль сдвига находится из диаграммы растяжения $\sigma = f(\varepsilon)$ а коэффициенты Пуассона и линейного расширения находятся из экспериментально полученных кривых $\nu^j = \nu^j(T)$, $\alpha^j = \alpha^j(T)$.

б) Модуль сдвига и коэффициент линейного расширения зависят от температуры.

в) Модуль сдвига и коэффициент Пуассона зависят от температуры.

г) Только модуль сдвига зависит от температуры.

д) Свойства материала не зависят от температуры.

Рассматривался трехслойный цилиндр с радиусами R_0 = 200 мм, R_1 = 500 мм, R_2=508 мм, R_3 = 538 мм. Температура во всех точках трехслойного цилиндра считается установившейся (постоянной) и равна 200^0C. Рассматривался случай, когда на внутренней и внешней поверхности слоистого цилиндра радиальные σ_r напряжения равны нулю. Распределение радиальных перемещений и напряжений при переходе от слоя к слою в соответствии с условием непрерывно во всех рассмотренных вариантах. Окружные напряжения σ_φ терпят разрыв при переходе от слоя к слою. Во внутреннем и среднем слоях они являются сжимающими, а на внешнем слое – растягивающим. Такой характер распределения окружных напряжений обусловлен различием коэффициентов линейного расширения слоев. Для изучения влияния коэффициента линейного расширения была решена подобная задача, в котором переставлены местами материалы внутреннего и среднего слоёв. При таком расположении слоев для длинного трехслойного цилиндра, окружные напряжения σ_φ во внутреннем слое остаются сжимающими, а в среднем и внешнем слоях они становятся растягивающими. Такое исследование показывает, что распределение окружных напряжений σ_φ связано с отношением коэффициентов линейного расширения материала различных слоев. Толщину внешнего слоя увеличили на 20 мм. Вследствие такого изменения, окружные напряжения σ_φ в среднем слое становятся сжимающими. Таким образом, меняя размеры отдельных слоев и материалы их, можно регулировать уровень и характер распределения напряжений в отдельных слоях. Этот результат может быть использован в различных областях техники.

Литература:

1. *Леонова Э.А.* Температурные напряжения в цилиндре с переменными термоупругими свойствами. // Изв. вузов. Черная металлургия, 1976. N1. С.161-166.
2. *Лубеней* В.Д. Расчет составной толстостенной трубы с учетом неравномерного осесимметричного нагрева. Труды МВТУ им. Баумана. Вып.31, 1955. С.63-98.
3. *Мсишнии Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. С.399.
4. Поляков А.П., Поляков П.А. Расчет двухслойного цилиндра, работающего в условиях термосилового цилиндрического напряжения. – Вестник машиностроения, 2006, №1, с. 15-20.
5. Василенко А.Т., Судовцева Г.К. Напряженное состояние термочувствительных толстостенных цилиндров из анизотропных цилиндров.- Механика композиционных материалов, 1999,№3.С. 367-374.
6. Оставнов А.А. О повышении несущей способности полиэтиленовых труб при подземной прокладке. – Сантехника, отопление, кондицирование, 2009, №9. С.22-27.
7. Язьев В.М., Литвинов С.В. Задача термовязкоупругости для многослойного неоднородного полимерного цилиндра.– Пластические массы, 2007, №9. С 36-38.
8. Абиров Р.А. К исследованию напряженно-деформированного состояния труб.– Проблемы механики (Узбекистан), 2008, №2-3, с. 6-7.
9. *Бчрешн И.С. ЖшЬаш 11.11.* Методы вычислений. М.: Физмат. пп. 1969. Т.2. С.620.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., ФМЛ, 1975, 631 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Турметов Б.