Пирожкова Е.А.

РАСЧЕТ ТОЧЕЧНОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ПО ЦЕНЕ

E.A. Pirozhkova

CALCULATION OF THE POINT ELASTICITY OF DEMAND

УДК: 380.113: 380.13

В статье разрабатывается методика определения численного значения точечной эластичности спроса по цене. Значение точечной эластичности необходимо при проведении экономического анализа последствий широкого спектра управленческих решений.

The method of determining the numerical value of the point elasticity of demand is considered in the article. The value of the point elasticity is used in conducting economic impact analysis a wide range of managerial decisions.

При проведении экономических расчетов возникает необходимость выяснить, как будет реагировать в каждом конкретном случае изменение величины спроса на товар на изменение цены данного товара.

Рассмотрим график зависимости изменения величины P (цены) от изменения величины Q (спроса на товар), т.е. P = f(Q).

Изменение величин P и Q:

P1 и Q1 – начальные значения;

P2 и Q2 – конечные значения;

ΔQ = Q2 – Q1 – абсолютное изменение величины Q (или приращение величины Q) причем значение величины ΔQ - отрицательное;

ΔP = P2–P1 – абсолютное изменение величины P (или приращение величины P).

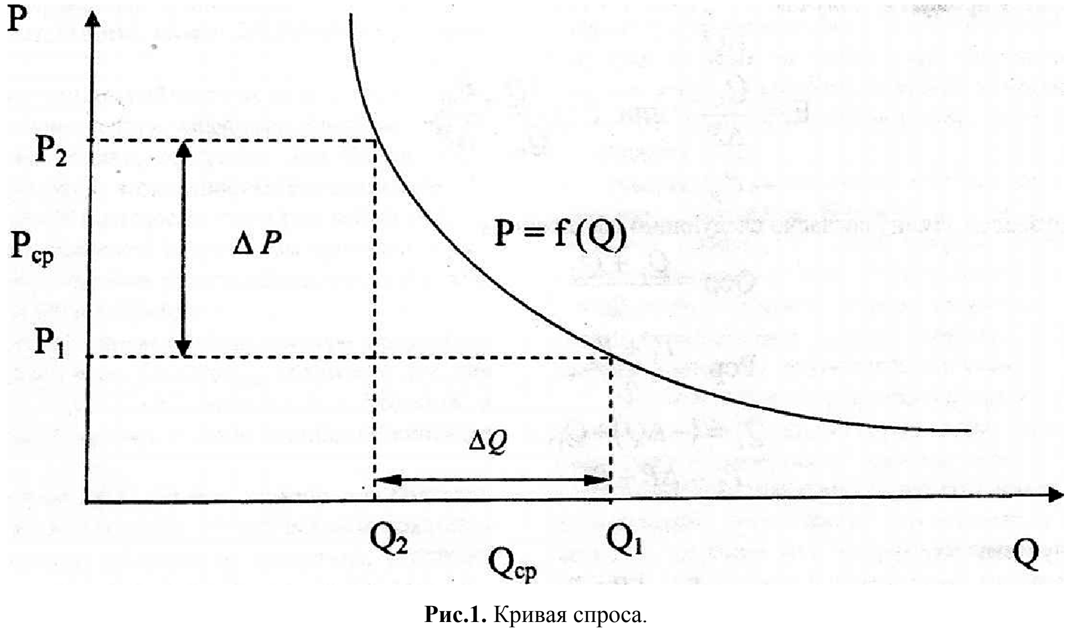

Рис.1. Кривая спроса.

Дадим несколько экономических определений эластичности и ценовой эластичности спроса. По Э.Дж.Долану и Д.Е.Линдсею:

Эластичность – это мера реакции одной переменной на изменение другой, выраженная как отношение процентных изменений. Соответственно, эластичность спроса по ценам - это отношение процентного изменения в величине спроса на товар к данному процентному отношению его цены [1, с.61]. По П.Э.Самуэльсону и В.Д. Нордхаусу:

Ценовая эластичность спроса (иногда называемая просто ценовая эластичность) показывает, насколько именно изменится величина спроса на товар в результате изменения цены. Более точным определением является следующее: ценовая эластичность спроса - это процентное изменение величины спроса, деленное на процентное изменение цены [2, с. 151].

Абсолютные изменения величины P (цены данного товара) будут зависеть от многих факторов, не относящихся к сути дела. Поэтому от абсолютных изменений величин, которые мы будем сопоставлять, нам необходимо перейти к относительным изменениям величин. Этот переход также позволит нам избавиться от размерностей.

Выразим математически относительное процентное изменение величины Q, обозначив его % ΔQ:

$$\%\Delta Q = \frac{\Delta Q}{Q_{cp}} * 100\%.$$

Это будет отношение приращения ΔQ величины Q (спроса на товар) к среднему значению Qср рассматриваемых нами величин Q1 и Q2, выраженное в процентах.

Аналогично можно записать формулу нахождения относительного изменения величины P (цены), выраженного в процентах:

$$\%\Delta P = \frac{\Delta P}{P_{cp}} * 100\%.$$

Отношение этих величин друг к другу и будет определять степень изменения величины P в ответ на изменение величины Q. Это отношение в экономике называется эластичностью, обозначается латинской буквой E.

На основании вышесказанного, запишем:

$$E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_{cp}} * 100\%}{\frac{\Delta P}{P_{cp}} * 100\%},$$

сократив проценты, получим:

$$E = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_{cp}}}{\frac{\Delta P}{P_{cp}}}, \text{ или } E = \frac{\Delta Q}{Q_{cp}} * \frac{P_{cp}}{\Delta P}.$$

Произведем замену согласно следующим выражениям:

$$\text{Qср} = \frac{Q_1 + Q_2}{2},$$

$$\text{Pср} = \frac{P_1 + P_2}{2},$$

$$Q_2 = (-\Delta Q) + Q_1,$$

$$P_2 = \Delta P + P_1.$$

Получаем:

$$E = \frac{\Delta Q}{\frac{(-\Delta Q) + Q_1 + Q_1}{2}} * \frac{\frac{P_1 + \Delta P + P_1}{2}}{\Delta P} = \frac{\Delta Q}{2 * Q_1 + (-\Delta Q)} * \frac{2 * P_1 + \Delta P}{\Delta P}.$$

Чем меньше будет расхождение между значениями, тем меньше будет приращение - ΔQ величины Q и, соответственно, приращение ΔP величины P.

Согласно этому запишем:

$$E=\lim_{\Delta Q\to 0}\left(\frac{-\Delta Q}{2*Q+(\Delta Q)}*\frac{2*P_1+\Delta P}{\Delta P}\right)=\lim_{\Delta Q\to 0}\left(\frac{-\Delta Q}{2*Q}*\frac{2*P_1}{\Delta P}\right)=-\frac{P_1}{Q}\lim\frac{\Delta Q}{\Delta P}=-\frac{dQ}{dP}*\frac{P_1}{Q}=-\frac{dQ}{Q}*\frac{P_1}{dP}.$$

Так как при сравнении величин ΔQ и $2*Q_1$, ΔP и $2*P_1$ можно записать:

$\Delta Q \prec\prec 2*Q_1$; $\Delta P \prec\prec 2*P_1$, ($\prec\prec$ - много меньше)

и при решении предела в суммах:

$$(2*P_1+\Delta P) \text{ и } (2*Q_1+\Delta Q)$$

величинами ΔQ и ΔP мы можем пренебречь.

Общее дифференциальное уравнение для нахождения эластичности будет иметь вид:

$$E=-\frac{dQ}{Q}*\frac{P}{dP}. \qquad (1)$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения. Приведем уравнение (1) к виду:

$$-\frac{dQ}{Q}=E*\frac{dP}{P}.$$

Теперь проинтегрируем обе части уравнения:

$$-\int\frac{dQ}{Q}=\int E*\frac{dP}{P},$$

$$-\int\frac{dQ}{Q}=E\int\frac{dP}{P}.$$

Учитывая, что $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, перепишем наше уравнение:

$$-\ln Q+C_1=E*\ln P+C_2.$$

Пусть

$$C_1-C_2=C_3,\ C_3=\ln C,$$

тогда

$$-\ln Q+\ln C=E\ln P, \text{ при } C\neq 0. \qquad (2)$$

Выразим эластичность E, учитывая свойства логарифма:

$$\ln(a*b)=\ln a+\ln b;\ \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b.$$

$$E=\frac{-\ln Q+\ln C}{\ln P},$$

т.е. эластичность будет определяться по этой формуле.

Вернемся к уравнению (2) и выразим величину Q:

$$\ln Q=\ln C-\ln P^E,$$

$$\ln Q=\ln\frac{C}{P^E},$$

$$Q=\frac{C}{P^E}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) будет являться общим решением дифференциального уравнения (1).

Из уравнения (3) мы при заданных значениях Q, P, E всегда сможем вычислить значение константы C.

$$C=Q*P^E. \qquad (4)$$

Допустим, что значение величины Q изменяется от начального значения Q_1 до конечного значения Q_2, а значение величины P изменяется от начального значения P_1 до конечного значения P_2. Тогда, воспользовавшись уравнением (4), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C = Q_1 * P_1^E, \\ C = Q_2 * P_2^E. \end{cases}$$

Правые части этих уравнений равны между собой, поэтому запишем:

$$Q_1 * P_1^E = Q_2 * P_2^E,$$

разделим обе части уравнения на величину P_1^E, получим:

$$Q_1 = \frac{Q_2 * P_2^E}{P_1^E}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) будет являться частным решением дифференциального уравнения (1). Выразим величину P из уравнения (5), применяя логарифмирование:

$$P_1^E = \frac{Q_2 * P_2^E}{Q_1},$$

$$\ln P_1^E = \ln\left(\frac{Q_2 * P_2^E}{Q_1}\right),$$

$$E * \ln P_1 = \ln Q_2 + E * \ln P_2 - \ln Q_1,$$

$$\ln P_1 = \frac{1}{E} * \ln Q_2 + \ln P_2 - \frac{1}{E} * \ln Q_1,$$

$$\ln P_1 = \ln Q_2^{\frac{1}{E}} + \ln P_2 - \ln Q_1^{\frac{1}{E}},$$

$$\ln P_1 = \ln\left(\frac{Q_2^{\frac{1}{E}}}{Q_1^{\frac{1}{E}}}\right) + \ln P_2,$$

$$\ln P_1 = \ln\left(\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{\frac{1}{E}} * P_2\right),$$

$$P_1 = P_2 * \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{\frac{1}{E}}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) также является частным решением дифференциального уравнения. Приведем уравнение (5) к виду:

$$P_1^E * Q_1 = P_2^E * Q_2,$$

разделим обе части уравнения на произведение $Q_1 * P_0^E$, получим:

$$\frac{P_1^E}{P_2^E} = \frac{Q_2}{Q_1} \text{ или } \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^E = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Прологарифмируем обе части уравнения, получим:

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^E = \ln\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right),$$

$$E * \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \ln\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right),$$

$$E = \frac{\ln\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)},$$

$$E = \frac{\ln Q_2 - \ln Q_1}{\ln P_1 - \ln P_2}. \tag{7}$$

По формуле (7) можно определить численное значение точечной эластичности, при условии, что нам известны начальные и конечные значения величин Q и P.

Список литературы:

1. Долан Э. Дж., Линдсей Д. Рынок: микроэкономическая модель/ Пер.с англ. В.Лукашевича и др.; Под общ.ред. Б.Лисовика и В.Лукашевича. - М.: 1996. - 496 с.
2. Самуэльсон, Пол Э., Нордхауе, Вильям, Д. Экономика, 18-е издание: Пер.с англ. - М.: ООО «И.Д. Вильяме»: 2007.-1360 с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по математике. - М.: АСТ: Астрель: 2010. - 1055с.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. - ТетраСистемс: 1999. - 640 с.

Рецензент: д.э.н., профессор Мусакожоев Ш.М.