Абдукаримов А.М.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

A.M. Abdukarimov

ON BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRO-SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON INFINITE DOMAIN

УДК: 517.966.2

В работах [1-4] были рассмотрены вопросы об ограниченности решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциалъных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается об ограниченности решений на бесконечной области для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра.

In works [1-4] questions on limitation of decisions on infinite area of the integrated and integro-differential equations on a half shaft have been considered.

In this article it is studied about limitation of decisions on infinite area for the two-dimensional integrated equations of type of Volterra.

Рассмотрим уравнение

$$u''_{tx}(t,x)+c(t,x)u(t,x)+\int_0^t A(t,x,s)u''_{sx}(s,x)\,ds+\int_0^x B(t,x,y)u''_{ty}(t,y)\,dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u''_{sy}(s,y)\,dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G, \tag{1}$$

$$f(t,x)\in L_2(G)\cap C(G) \tag{f}$$

где $c(t,x), A(t,x,s), B(t,x,y), K(t,x,s,y), f(t,x)$ - известные непрерывные функции, $u(t,x)$ - неизвестная функция по области $G_{t,x}=\{0\le s\le t,\ 0\le y\le x\}$.

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $c(t,x)\in C(G), c'_t(t,x)\le 0, c'_x(t,x)\le 0, c'(t,x)\ge\alpha>0, c''_{tx}(t,x)\ge 0$ при $(t,x)\in G$;

б) функции $A(t,x,s), A'_t(t,x,y), A'_s(t,x,s)$ $A''_{ts}(t,x,y)\in C(G_1), G_1=\{(t,x,s)/0\le s\le t<\infty, 0\le x<\infty\}$, $A(t,x,0)\ge 0$ и $A'_t(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$; $A'_s(t,x,s)\ge 0$ и $A''_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

в) функции $B(t,x,y)$, $B'_x(t,x,y)$, $B'_y(t,x,y)$, $B''_{xy}(t,x,y)\in C(G_2)$, $G_2=\{(t,x,y)/0\le t<\infty,\quad 0\le y\le x<\infty\}$, $B(t,x,0)\ge 0$ и $B'_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$; $B'_y(t,x,y)\ge 0$ и $B''_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

г) функции $K(t,x,s,y)$, $K'_t(t,x,s,y)$, $K'_x(t,x,s,y)$, $K''_{tx}(t,x,s,y)$, $K'_s(t,x,s,y)$, $K'_y(t,x,s,y)$, $K''_{ty}(t,x,s,y)$, $K''_{ts}(t,x,s,y)$, $K''_{sy}(t,x,s,y)$, $K'''_{tys}(t,x,s,y)$, $K'''_{xys}(t,x,s,y)$, $K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\in C(G_3)$, $G_3=\{(t,x,s,y)/0\le s\le t<\infty,\ 0\le y\le x<\infty\}$, $K'_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K'_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $K(t,x,0,0)\ge 0$, $K'_t(t,x,0,0)\le 0$, $K'_x(t,x,0,0)\le 0$, $K''_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G$ $K''_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$, $K'''_{xys}(t,x,s,y)\le 0$, $K'''_{tys}(t,x,s,y)\le 0$, $K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

д) $\left[K(t,x,0,0)+c(t,x)\right]^2 - A_t'(t,x,0)\,B_x'(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$,

$sy\left(K_{sy}''(t,x,s,y)\right)^2 - A_{ts}''(t,x,s)B_{xy}''(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,s,y)\in G_4$, то уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве непрерывных и ограниченных со своими производными функций $\overline{C}^2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем следующую подстановку

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)\,duds \tag{2}$$

$$\vartheta(t,x)+\int_0^t\int_0^x c(t,x)\vartheta(s,y)\,dyds+\int_0^t A(t,x,s)\,K_1(s,x)\,\vartheta(s,x)\,ds+\int_0^x B(t,x,y)\,\vartheta(t,y)\,dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)\vartheta(s,y)\,dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G, \tag{3}$$

Обе части тождества (3) умножим на $\vartheta(t,x)$ и проинтегрируем по области $G_{t,x}\{0\le s\le t;\,0\le y\le x\}$. Тогда

$$\int_0^t\int_0^x \vartheta^2(s,y)dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y c(s,y)\,\vartheta(\tau,z)\,\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)\,\vartheta(\tau,y)\,\vartheta(s,y)\times\times d\tau dyds+$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s B(s,y,z)\,\vartheta(s,z)\,\vartheta(s,y)\,dzdyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z)\,\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x f(s,y)\,\vartheta(s,y)\,dyds\,. \tag{4}$$

Для преобразования второго интеграла (4), его преобразуем к виду

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y c(s,y)\,\vartheta(\tau,z)\,\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y c(s,y)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds\,.$$

Далее используем соотношение

$$C\nu\nu_{sy}''=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{sy}-\frac{1}{2}\left(C_s'\nu^2\right)'_y-\frac{1}{2}\left(C_y'\nu^2\right)'_s+\frac{1}{2}C''_{sy}\nu^2-C\nu_y'\nu_s'$$

и формулу Дирихле, получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y c(s,y)\,\vartheta(\tau,z)\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds=\frac{1}{2}c(t,x)\left(\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t c_s'(s,x)\left(\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_0^x c_y'(t,y)\left(\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x c_{sy}''(s,y)\left(\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2 dyds-\int_0^t\int_0^x c(s,y)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_0^y \vartheta(s,\nu)\,d\nu\right)dyds. \tag{5}$$

Далее пользуясь формулами $\mathrm{KWW_s}'=\frac{1}{2}(KW^2)_s'-\frac{1}{2}K_s'W^2$, и интегрирования по частям и формулой Дирихле, преобразуем левую часть соотношения (4)

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y)\,\vartheta(s,y)\,d\tau dyds=-\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)d\tau\vartheta(s,y)\,dyds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x A(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\vartheta(s,y)\,dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s A'_\tau(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\vartheta(s,y)\,d\tau dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x A(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dy-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A'_s(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A'_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dyd\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t A''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dsdyd\tau .$$

Применив формулу Дирихле, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y)\vartheta(s,y)\,d\tau dyds=\frac{1}{2}\int_0^x A(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A'_s(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A'_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s A''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 d\tau dyds . \tag{6}$$

Аналогично этому получим для четвертого слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y B(s,y,z)\vartheta(s,z)\vartheta(s,y)\,dzdyds=\frac{1}{2}\int_0^t B(s,x,0)\left(\int_0^x \vartheta(s,v)\,dv\right)^2 ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x B'_y(s,y,0)\left(\int_0^y \vartheta(s.v)\,dv\right)^2 dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x B'_z(s,x,z)\left(\int_z^x \vartheta(s,v)dv\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y B''_{zy}(s,y,\tau)\left(\int_z^y \vartheta(s,v)\,dv\right)^2 dzdyds . \tag{7}$$

Для преобразования пятого интеграла используем следующую формулу

$$Cv''_{\tau z}=(Cv)''_{\tau z}-(C'_\tau v)'_z-(C'_z v)'_\tau+C''_{\tau z}v$$

при $v(s,y,\tau,z)=\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi$.

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z)\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)dzd\tau\times$$

$$\times\vartheta(s,y)\,dyds=\int_0^t\int_0^x\left[\int_0^s\int_0^y \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(K(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)dzd\tau-\right.$$

$$-\int_0^s\int_0^y \frac{\partial}{\partial z}\left(K'_\tau(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)dzd\tau-\int_0^s\int_0^y \frac{\partial}{\partial\tau}\left(K'_z(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\tau\right)dzd\tau+$$

$$\left.+\int_0^s\int_0^y K''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi dzd\tau\right]\vartheta(s,y)\,dyds=\int_0^t\int_0^x K(s,y,0,0)\left(\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)\vartheta(s,y)\,dyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\vartheta(s,y)\,dzdyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'_z(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\vartheta(s,y)\,dzdyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\,\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds\,.$$

Далее используя, формулу

$$C\nu\nu''_{sy}=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{sy}-\frac{1}{2}\left(C'_s\nu^2\right)'_y-\frac{1}{2}\left(C'_y\nu^2\right)'_s+\frac{1}{2}C''_{sy}\nu^2-C\nu'_y\nu'_s$$

и формулу Дирихле, получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\,\vartheta_1(\tau,z)\,\vartheta(s,y)\,dzd\tau dyds=\frac{1}{2}K(t,x,0,0)\left(\int_0^t\int_0^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t K'_s(s,x,0,0)\left(\int_0^s\int_0^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2ds-\frac{1}{2}\int_0^x K'_y(t,y,0,0)\left(\int_0^t\int_0^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{sy}(s,y,0,0)\left(\int_0^s\int_0^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dyds-\int_0^t\int_0^x K(s,y,0,0)\left(\int_0^s\vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_0^y\vartheta(s,\nu)\,d\nu\right)dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t K'_\tau(t,x,\tau,0)\left(\int_\tau^t\int_0^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\xi d\nu\right)^2d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s K''_{\tau s}(s,x,\tau,0)\left(\int_\tau^s\int_0^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{\tau y}(t,y,\tau,0)\left(\int_\tau^t\int_0^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dyd\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'''_{\tau sy}(s,y,\tau,0)\left(\int_\tau^s\int_0^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2d\tau dyds-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'_\tau(s,y,\tau,0)\left(\int_\tau^s\vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_0^y\vartheta(s,\nu)\,d\nu\right)d\tau dyds+\frac{1}{2}\int_0^x K'_z(t,x,0,z)\left(\int_0^t\int_z^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dz-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{zs}(s,x,0,z)\left(\int_0^s\int_z^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dzds-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y K''_{zy}(t,y,0,z)\left(\int_0^t\int_z^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dzdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'''_{zsy}(s,y,0,z)\left(\int_0^s\int_z^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dzdyds-\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'_z(s,y,0,z)\left(\int_0^s\vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\times$$

$$\times\left(\int_z^y\vartheta(s,\nu)\,d\nu\right)dzdyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{\tau z}(t,x,\tau,z)\left(\int_\tau^t\int_z^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dzd\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'''_{\tau zy}(t,y,\tau,z)\times$$

$$\times\left(\int_\tau^t\int_z^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dzdyd\tau--\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'''_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2d\tau dzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2dzd\tau dyds-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_z^y\vartheta(s,\nu)\,d\nu\right)dzd\tau dyds\,.\qquad(8)$$

Учитывая формулы (5), (6), (7), (8) и условие д), из (4) имеем

$$\int_0^t\int_0^x\vartheta^2(s,y)\,dyds+\frac{1}{2}c(t,x)\left(\int_0^t\int_0^x\vartheta(\xi,\nu)\,d\nu d\xi\right)^2-$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t c_s'(s,x)\left(\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_0^x c_y'(t,y)\left(\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x c_{sy}''(s,y)\left(\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left[-A_s'(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left[2K(s,y,0,0)+2c(s,y)\right]\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_0^y \vartheta(s,v)\,dv\right)-B_y'(s,y,0)\left(\int_0^y \vartheta(s,v)\,dv\right)^2\right]dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\left\{-\frac{A_{\tau s}''(s,y,\tau)}{y}\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2-2K_{\tau z}''(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)\left(\int_z^y \vartheta(s,v)\,dv\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{B_{zy}''(s,y,\tau)}{s}\left(\int_z^y \vartheta(s,v)\,dv\right)^2\right\}dzd\tau dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left[A_\tau'(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dyd\tau+\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^x B_z'(s,x,z)\left(\int_z^x \vartheta(s,v)\,dv\right)^2 dzds+\frac{1}{2}\int_0^x A(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t B(s,x,0)\left(\int_0^x \vartheta(s,v)\,dv\right)^2 ds+\frac{1}{2}K(t,x,0,0)\left(\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t K_s'(s,x,0,0)\left(\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_0^x K_y'(t,y,0,0)\left(\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K_{sy}''(s,y,0,0)\left(\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K_{\tau z}''(t,x,\tau,z)\left(\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dzd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y K_{\tau zy}'''(t,y,\tau,z)\left(\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dzdyd\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s K_{\tau zs}'''(s,x,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 d\tau dzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K_{\tau zsy}^{(IV)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,v)\,dvd\xi\right)^2 dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x f(s,y)\,\vartheta(s,y)\,dyds. \quad (9)$$

В силу условий а), б), в), г) и д) из (9) имеем

$$\int_0^t\int_0^x \vartheta^2(s,y)\,dyds+\frac{\alpha}{2}\left(\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)\,dyds\right)^2\le\left|\int_0^t\int_0^x f(s,y)\,\vartheta(s,y)\,dyds\right|. \quad (10)$$

$$\int_0^t\int_0^x f(s,y)\vartheta(s,y)dyds\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x f^2(s,y)dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \vartheta^2(s,y)dyds$$

С учетом этого из (13) имеем

$$\int_0^t\int_0^x \vartheta^2(s,y)\,dyds+\frac{\alpha}{2}\left(\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)\,dyds\right)^2\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x f^2(s,y)\,yds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \vartheta^2(s,y)\,dyds$$

Отсюда в силу условия *(f)* имеем

$$\int_0^t\int_0^x \vartheta^2(s,y)\,dyds + \alpha u^2(t,x) \le \int_0^\infty\int_0^\infty f^2(s,y)\,dyds < \infty$$

из которого следует

$$u^2(t,x) \le \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty f^2(s,y)\,dyds.$$

Следовательно, $u(t,x)$ ограничена при $(t,x)\in G$.

Таким образом, теорема доказана.

Литература:

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. - Фрунзе: Илим, 1974. - 352 с.
2. Ведь Ю.А., Искандаров С. Об ограниченности решений линейной системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Уральск, регион, конф. «Функционально-дифференц. уравнения, уравнения и их приложения», Пермь, фев. 1988 г.: Тез. докл. -Пермь: Пермск. гос. ун-т, 1988. - С. 102.
3. Искандаров С. Об ограниченности и квадратичной интегрируемости на полуоси решений и их производных одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра //Изв. АН Киргиз. ССР. - 1983.-№1,-С. 19-23.
4. Искандаров С. Об ограниченности и устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1979. - С. 85-102.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.