

Дюшекеев К.Д.

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИНТОВЫХ ПРУЖИНАХ

УДК 539.37

Пружины, в частности цилиндрические винтовые пружины, нашли очень широкое применение в технике, выполняя различные функции в огромном количестве разнообразных конструкций.

По характеру работы цилиндрические винтовые пружины могут быть подразделены на две основные группы:

1) Пружины кручения; 2) Пружины растяжения (сжатия).

В этой статье мы рассмотрим винтовые цилиндрические пружины растяжения<sup>1</sup>.

Пусть пружина растягивается осевой силой  $P$  (рис.1). Эта сила приводит к появлению в сечениях проволоки двух моментов — изгибающего  $M_{из}$  и крутящего  $M_{кр}$ , а также одной силы, разлагающейся на поперечную составляющую  $P_c$  и нормальную составляющую  $P_n$ . Учитывая угол подъема  $\alpha$  винтовой линии, для указанных величин можно записать:

$$M_{из} = \frac{PD}{2} \sin \alpha, \quad M_{кр} = \frac{PD}{2} \cos \alpha, \\ P_c = P \cos \alpha, \quad P_n = P \sin \alpha \quad (1)$$

Как показывают эксперименты [1], а также формулы (1), при малых углах подъема винтовой линии в напряженное состояние в сечениях проволоки наибольший вклад вносит крутящий момент, т.е. проволока пружины работает в основном на кручение. Поэтому из напряжений, возникающих в поперечном сечении проволоки пружины, наибольшими являются касательные напряжения даже без учета напряжений сдвига, появляющихся под действием поперечной силы  $P_c$ .

Касательные напряжения в сечениях прямого бруса достаточно легко определяются формулами сопротивления материалов и хорошо согласуются с экспериментальными данными [2]. Определение касательных напряжений в винтовой проволоке пружины вызывает определенные трудности, связанные с кривизной проволоки. Поэтому в течение долгого времени различные исследователи посвящали много времени и труда этой теме.

В работе С.Д.Пономарева [1] приведен глубокий анализ исследований А.Ровёра, А.Вааля, Е. Хонеггера, М. Пильграма, О Гонёра. Согласно Роверу и Вааля касательные напряжения всегда

перпендикулярны к некоторому радиусу – вектору, центр которого не совпадает с центром тяжести сечения, что противоречит закону парности касательных напряжений.

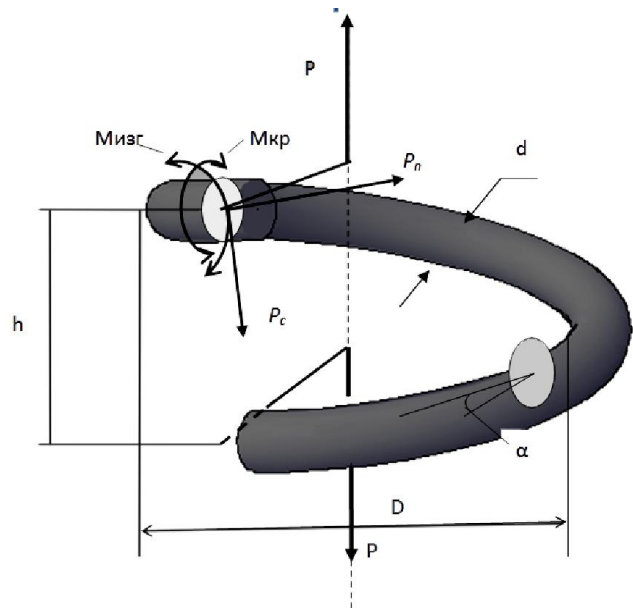


Рис.1.

Но с другой стороны, их рассуждения хорошо объясняет тот факт, что на внутренних волокнах проволоки пружины значения касательных напряжений больше чем на наружных. Хоннегер продолжая исследования Ровера-Вааля ввел в их уравнения угол подъема витка. В исследованиях О.Гонёра в основу были положены уравнения теории упругости, ему удалось получить формулы, обладающие большой точностью. Учитывая угол подъема витка, он предлагает для касательных напряжений следующую формулу:

$$\tau_{max} = \frac{PR \cos \alpha}{W_p} \left\{ \frac{1}{1-r/\rho} + \frac{r}{4\rho} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right\} + \left[ 0,62 \frac{r}{\rho} + \frac{0,53 \left( \frac{r}{\rho} \right)^2}{1-\frac{r}{\rho}} \right] tg^2 \alpha, \quad (2)$$

где  $\rho = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$ ,  $R$  – радиус пружины,  $W_p$  –

момент сопротивления сечения.

Выражение при  $tg^2 \alpha$  учитывает влияние среза, входящие в него цифровые коэффициенты подсчитаны при значении коэффициента Пуассона  $\mu = 0,33$ . Как видно из (2) в центре сечения касательное напряжение от кручения не равно нулю, эпюра напряжений несимметрична

<sup>1</sup> Для краткости в дальнейшем опустим слова «винтовые цилиндрические», а также «сжатия»

относительно осей симметрии и распределение напряжений нелинейное.

Очень интересная задача приводится в работе [3], авторы в ней попытались решать задачу неупругого деформирования пружины, применяя при этом определяющие соотношения, предложенные в работе [4]. Но в работе [3] предполагается распределение касательных напряжений по сечению линейным.

При выводе определяющих соотношений одни авторы не учитывают угол подъема винтовой линии, ссылаясь на его незначительность, другие авторы не учитывают отношение диаметра пружины к диаметру проволоки, считая это отношение достаточно большим, и можно не учитывать неравномерность распределения напряжений по сечению.

Тимошенко С.П. в работе [5] приводит задачу о кручении кольца, решение которой очень близко к решению О.Гонёра. При этом не учитывается угол подъема винтовой линии, но приводится строгое решение методом теории упругости. Вкратце изложим суть задачи.

Имеется сектор кольца, находящегося под действием двух равных и прямо противоположных сил  $P$ , приложенных по оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной к плоскости кольца. Эти силы вызывают одинаковый крутящий момент  $M_k = PR$  во всех поперечных сечениях кольца.

Если размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом  $R$ , то при определении напряжений формулы, выведенные для кручения прямолинейных стержней, могут дать достаточную точность.

В случае мощных винтовых пружин, т.е. в случае сопоставимых размеров радиуса поперечного сечения и радиуса винта пружины, должна быть учтена разность в длинах между наружными и внутренними кольцевыми волокнами.

С.П. Тимошенко применив общие уравнения теории упругости, получил для составляющих касательного напряжения следующие выражения:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{2M_k}{\pi a^4 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{R^2}\right)} \left[ y + \frac{5xy}{4R} + \frac{y}{16R^2} (27x^2 + 5y^2 - 10a^2) \right] \quad (3)$$

$$\tau_{\theta y} = -\frac{2M_k}{\pi a^4 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{R^2}\right)} \left[ x + \frac{7x^2}{8R} - \frac{3}{8R} (y^2 - a^2) + \frac{13x^3}{16R^2} - \frac{9xy^2}{16R^2} + \frac{1}{4} \frac{a^2 x}{R^2} \right] \quad (4)$$

Здесь  $a$  — радиус проволоки,  $R$  — радиус пружины,  $x, y$  — координаты точек сечения, начало координат расположено в центре тяжести сечения.

Приведем выражения (3,4) к безразмерному виду. Для этого введем следующие обозначения:

$$t_1 = \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{y\max}}, \quad t_2 = \frac{\tau_{\theta y}}{\tau_{y\max}}, \quad \frac{a}{r} = k, \quad \frac{x}{a} = k_1, \quad \frac{y}{a} = k_2 \quad (5)$$

где  $\tau_{y\max} = -\frac{M_k}{\pi a^3/4}$  — максимальное упругое касательное напряжение в сечении прямого бруса.

С учетом введенных обозначений получим следующие выражения для составляющих напряжений в безразмерном виде:

$$t_1 = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{16} k^2\right)} \left[ k_2 + \frac{5}{4} k_1 k_2 k + \frac{k k_2}{16} (27 k_1^2 + 5 k_2^2 - 10) \right]$$

$$t_2 = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{16} k^2\right)} \left[ k_1 + \frac{7}{8} k k_1^2 - \frac{3}{8} k (k_2^2 - 1) + \frac{13}{16} k^2 k_1^3 - \frac{9}{16} k k_2^2 k_1 + \frac{1}{4} k_1 k^2 \right]$$

Для нас большой интерес представляет изменение различия значений напряжений по горизонтальной оси сечения на внутренней и внешней точках проволоки, а также отклонения точки пересечения эпюры касательных напряжений от центра тяжести сечения при изменении отношения радиуса пружины к радиусу проволоки.

Нами были произведены вычисления по выше приведенным соотношениям. При этом отношения радиусов меняли от двух до ста.

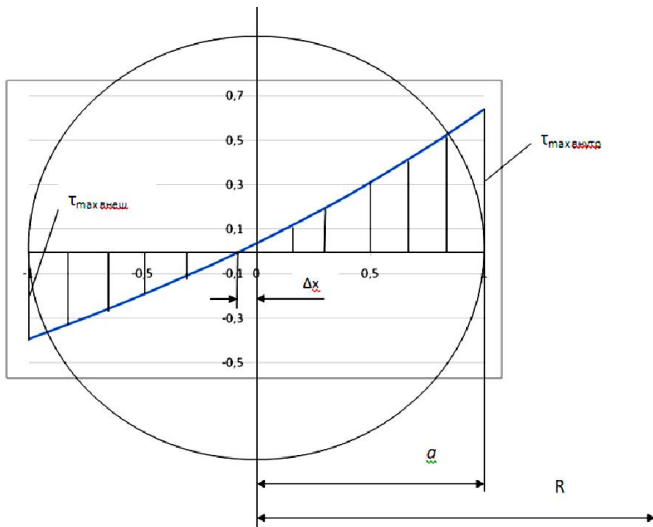


Рис.2.

На рис.2 показана эпюра распределения напряжений для горизонтальной оси сечения. Видно, что эта эпюра пересекает горизонтальную ось не в центре сечения, а на некотором расстоянии  $\Delta x$  в наружную сторону оси и максимальные значения напряжений на внутренней точке больше чем на внешней точке сечения. На рис.3 приведено влияние отношения радиуса пружины к радиусу проволоки на величину отклонения точки пересечения эпюры напряжений  $\Delta x$  от центра сечения. Зависимости изменения величин напряжений на внутренней и внешней точках проволоки, а также их отношения от соотношения радиуса пружины и радиуса проволоки показаны на рис. 4.

Из приведенных рисунков можно сделать следующие выводы:

1. Величина отношения радиуса пружины к радиусу проволоки  $\frac{R}{a}$  на отклонение точки пересечения эпюры напряжений  $\Delta x$  от центра сечения очень сильно влияет в пределах от 3 до 20, при дальнейшем увеличении данного отношения эксцентриситет  $\Delta x$  асимптотически приближается к нулю.

2. При малых значениях отношения  $\frac{R}{a}$  напряжения на внутренней точке несколько раз больше, чем на наружной, эта разница выравнивается с увеличением радиуса пружины и при  $\frac{R}{a} > 40$  можно принять их равными.

3. Распределение напряжений по горизонтальной оси нелинейное, оно изменяется по закону кубической параболы.

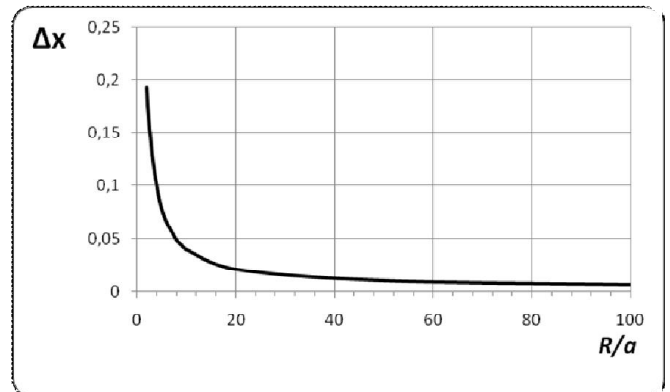


Рис.3.

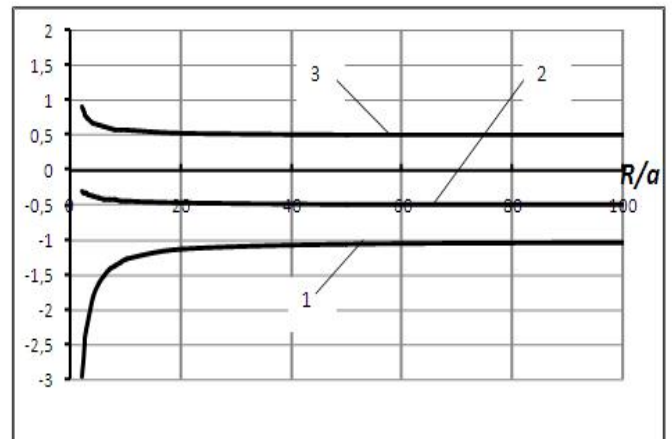


Рис.4. 1-отношение напряжения на внутренней точке к напряжению на внешней точке; 2-напряжение на внутренней точке; 3-напряжение на внешней точке.

#### Литература

1. Пономарев С.Д. Расчет и конструкции витых пружин.—Л.:ОНТИ, 1938
2. Писаренко Г.С. Курс сопротивления материалов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1964.
3. Абдрахманов С. А. Кожошов Т. Т. Аналитическое исследование характеристики цилиндрических пружин с памятью формы. - Механика композиционных материалов и конструкций. М.: 2010, том 2, №1, с 165 – 171.
4. С.Д. Пономарев, Л.Е. Андреева. Расчет упругих элементов машин и приборов. Машиностроение. М., 1980, 323 с
5. Тимошенко С.П. Теория упругости.—М.:ОНТИ, 1937