Калдыбаева Г.А., Сатыбаев А.Дж.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

G.A. Kaldybaeva, A.Dj. Satybaev

MODELING OF DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF THERMOELASTICITY

УДК: 517. 962.2, 519. 876.2

В данной работе описаны математические модели прямых и обратных задач термоупругости.

The given article describes mathematical models of direct and inverse thermo elasticity problems.

Введение. В последнее время теория термоупругости получила существенное развитие в связи с важными проблемами, возникающими при разработке новых конструкций паровых и газовых турбин, реактивных и ракетных двигателей, высокоскоростных самолетов, ядерных реакторов и др. Элементы этих конструкций работают в условиях неравномерного нестационарного нагрева, при котором изменяются физико-механические свойства материалов и возникают градиенты температуры, сопровождающиеся неодинаковым тепловым расширением частей элементов.

Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошном теле; оно вызывает тепловые (термические, температурные) напряжения. Знание величины и характера действия тепловых напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции.

В общем случае изменение температуры тела происходит не только вследствие подвода тепла от внешних источников, но и в результате самого процесса деформирования. При деформировании тела от механических или тепловых воздействий, протекающих с большой скоростью, возникает так называемый эффект связанности, обусловленный взаимодействием полей деформации и температуры. Он проявляется в образовании и движении тепловых потоков внутри тела, возникновении связанных упругих и тепловых волн, термоупругом рассеянии энергии.

В теории термоупругости обычно накладывается ограничение на величину термического возмущения: приращение температуры предполагается малым по сравнению с начальной абсолютной температурой. Снятие этого ограничения не нарушает предположения о малости деформаций, но приводит к появлению нелинейных членов в связанных уравнениях термоупругости. Возможно построение единой теории термоупругости без указанного ограничения в рамках предположения о малости деформаций, учитывающей зависимость упругих и термических коэффициентов от температуры. В общем случае она является нелинейной теорией связанной термоупругости и в качестве частных случаев охватывает как линейную теорию связанной термоупругости при малом термическом возмущении, так и теорию несвязанной термоупругости при большом термическом возмущении, использующую линейные уравнения движения и нелинейное уравнение теплопроводности.

При исследовании динамических задач термоупругости учет связанности полей деформации и температуры дает возможность выявить новые качественные особенности протекания процесса деформирования. Анализ сравнительно простого решения одномерной задачи о распространении плоских гармонических термоупругих волн в неограниченном теле позволяет правильно понять основные черты термоупругих явлений при разных частотах волн и параметрах связанности материала. В качестве основных граничных связанных задач термоупругости следует отметить двумерные задачи о распространении плоских термоупругих волн вдоль поверхности полупространства и продольных термоупругих волн в длинном цилиндре.
Все выше сказанное доказывает актуальность и ценность темы термоупругости и изучения ее моделей.

Математические модели и методы термомеханики. В математических моделях термомеханики рассматривают различные способы распространения тепла в сплошных средах. Считается, что распространение тепла может проходить за счет теплопроводности (тепло передается через само вещество), конвекции (тепло передается за счет относительного движения частиц нагретого тела) и излучения (перенос тепла осуществляется за счет электромагнитного излучения).

Модели термомеханики без учета электромагнитных полей. Основные законы термодинамики для изучения свойств термоупругого тела впервые применил Томсон. В этом случае модель получалась динамической и связанной, т.к. в уравнении теплопроводности и уравнениях движения учитывались слагаемые деформационного нагрева и инерционные члены.

В линейной теории термоупругости считается, что максимальное изменение температуры мало по отношению к начальной абсолютной температуре. Случай больших изменений температуры в рамках предположения о малости деформации приводит к необходимости учета нелинейных членов в связанных уравнениях термоупругости, а также зависимости тепловых и упругих свойств от температуры.

Особенно широкое развитие получили теории теплопроводности и термоупругости в случае изотропных пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями и трещинами. Для решения таких задач использовались методы комплексных потенциалов, сингулярных интегральных уравнений, функций Грина, малого параметра, дисторсии, интегральных преобразований, асимптотические методы, метод конечных элементов. Наиболее удобными в использовании оказались методы комплексных потенциалов.

Особое внимание в задачах термомеханики уделяется способу задания тепловой нагрузки и ее моделированию при решении конкретных задач. В этой области проведен ряд исследований, в которых учитывались различные формы моделирования тепловой нагрузки: задание значений температуры и плотности потоков тепла на границе, сосредоточенных источников тепла, однородных потоков тепла на бесконечности. Сосредоточенный источник тепла, как правило, рассматривается как предельный случай задания на контуре кругового отверстия потока тепла постоянной плотности, когда контур стягивается в точку.

Модели термомеханики с учетом электромагнитных полей. Изучением термомеханического поведения деформируемых твердых тел с учетом электромагнитных полей, связанных с механическими и тепловыми процессами в теле, занимается механика связанных полей.

При рассмотрении тела в двудипольной модели считается: оно состоит из движущихся материальных частиц-носителей электрических, магнитных зарядов, свободных зарядов и токов, создающие электромагнитное поле в среде. При этом поляризация и намагниченность моделируются электрическими и магнитными диполями, состоящие из пары положительных и отрицательных электрических и магнитных зарядов соответственно. На основе такого представления формулируется макроскопическая система уравнений электродинамики. В этой модели характеристики поля выводятся из предположения, что на каждый заряд в поле действует сила Лоренца, на диполь - момент таких сил.

В модели Максвелла - Минковского в отличии от рассмотренных выше моделей, в которых макроскопические электромагнитные поля и уравнения электродинамикн получается путем осреднения полей и уравнений на микро-уровне, уравнения электродинамики для движущегося тела получаются из уравнений Максвелла для неподвижного тела, исходя из предположения Лоренц - инвариантности уравнений электродинамики. Выражения для характеристик поля и энергии получаются из закона сохранения для системы взаимодействия электромагнитного поля и среды, предполагая замкнутость механической и незамкнутость электрических подсистем.

На основе описанных моделей с использованием локально-равновесной или рациональной термодинамики предложены некоторые обобщенные термодинамические модели, описывающие упругую, вязкоупругую, пластическую деформацию тел, способных к поляризации и намагничиванию и обобщающие классические модели линейной термоупругости, а также термовязкоупругости, термовязкопластичности. Кроме уравнения Максвелла, эти модели учитывают различные теплофизические свойства материалов тел, а именно: электропроводимость, пьезоэффект, пироэффект и др.

Исследования термоупругого состояния. Двумерные и плоские задачи. В настоящее время наиболее полно разработаны плоские задачи теплопроводности и термоупругости изотропных и анизотропных сред.

Проведены многочисленные исследования термоупругого состояния изотропной пластинки с отверстием или трещиной. При этом в качестве тепловых воздействий выступали сосредоточенные источники тепла или однородный поток тепла на бесконечности. Много исследований проведено и для многосвязных сред. Например, известны исследования для изотропного кругового диска с отверстиями, включениями или трещинами при действии сосредоточенных источников тепла и разности температур.

Термоупругость.

Основное уравнение термоупругости. При термическом расширении изотропное тело деформируется таким образом, что компоненты деформации $\gamma^{(1)}$ отнесенные к системе прямоугольных осей x_1 x_2 x_3 определяются выражением

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \alpha\vartheta\delta_{ij}, \tag{1.1}$$

Допускается, что ϑ достаточно мало для того, чтобы термические свойства тела оставались постоянными на том отрезке времени, который нас интересует. Суммарная деформация тела выражается через компоненты вектора перемещения u_i следующим уравнением:

$$\gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right) \tag{1.2}$$

где $\partial_j u_i$ обозначает частную производную $\partial u_i / \partial x_j$. Эта суммарная деформация состоит из термической деформации и упругой деформации, компоненты которой $\gamma_{ij}^{(2)}$ определяются соотношением (1.1)

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} - \frac{\lambda\theta\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, \tag{1.3}$$

где τ_{ij} — компоненты тензора напряжений; величина

$$\theta = \tau_{ij}, \tag{1.4}$$

является суммой главных напряжений; λ и μ — упругие постоянные Ламе для тела. Подставляя соотношения (1.1) - (1.3) — в уравнение $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ij}^{(2)}$

получим тензорное уравнение

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2u}\tau_{ij} - \left\{\frac{\lambda\theta}{2u(3\lambda+2u)} - \alpha\vartheta\right\}\delta_{ij}, \tag{1.5}$$

Решая тензорное уравнение относительно компонентов тензора напряжений, найдем

$$\tau_{ij} = (\lambda\Delta - \gamma\vartheta)\delta_{ij} + 2\mu\gamma_{ij} \tag{1.6}$$

$$\Delta = \gamma_{ii} = \partial_i u_i \tag{1.7}$$

обозначает расширение тела и

$$\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu). \tag{1.8}$$

Физический закон, выраженный тензорным соотношением (1.6), называется законом Дюамеля — Неймана

Термодинамическими переменными, описывающими состояние упругого тела, являются компоненты деформации (1.2) и абсолютная температура $T+\vartheta$.

Используя методы термодинамики обратимых процессов, Био показал, что энтропия s единицы объема тела определяется соотношением

$$s = c\rho \ln\left(1 + \frac{\vartheta}{T}\right) + \gamma\Delta \tag{1.9}$$

где аддитивная постоянная, входящая в определение энтропии, была выбрана таким образом, что энтропия была равна нулю в начальном состоянии. В этом уравнении ρ — плотность тела, c — удельная теплоемкость единицы массы (принимаемая независимой от температуры вблизи равновесной температуры T), и γ определяется формулой (1.1.8). Если ϑ мало по сравнению с T то соотношение (1.9) сводится к простому выражению для энтропии единицы объема

$$s = \frac{\rho c\vartheta}{T} + \gamma\Delta \tag{1.10}$$

Таким образом, количество тепла, поглощаемое единицей объема в процессе малых деформаций и малых изменении температуры, определяется формулой

$$h = Ts = \rho c\vartheta + \gamma T\Delta \tag{1.11}$$

Из теории теплопроводности в твердых телах известно, что изменение температуры внутри изотропного тела подчиняется уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k\Delta^2\vartheta + q \tag{1.12}$$

k — коэффициент теплопроводности тела; q — количество тепла выделяемого в единице объема тела. Подставляя выражение (1.10) в соотношение (1.11), найдем

$$Qc\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \gamma\mathrm{T}\frac{\partial\Delta}{\partial t} = k\nabla^2\vartheta + q \tag{1.13}$$

Если ввести коэффициент температуропроводности $\chi = \dfrac{k}{\rho c}$, то последнее уравнение можно записать в форме

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \chi\nabla^2 + Q - \gamma'\frac{\partial\Delta}{\partial t} \tag{1.14}$$

где $Q = q / \rho c$, $\gamma' = \gamma T / \rho c$.

Для того чтобы дополнить систему основных уравнений, присоединим к ней уравнения движения в виде

$$\tau_{ij,j} + \rho F_i = \rho\ddot{u}_i, \tag{1.15}$$

где (F_1, F_2, F_3) обозначает массовую силу в точке (x_1, x_2, x_3) - i-й компонент ускорения $\partial^2 u / \partial t^2$ бесконечно малого элемента, сосредоточенного около этой точки.

Система шестнадцати уравнений (1.2), (1.6), (1.14) и (1.15) вместе с соответствующими граничными условиями достаточна для определения изменения температуры и компонентой напряжений и перемещения в случае когда источники тепла и массовые силы заданы.

Безразмерная форма уравнений. Основные уравнения термоупругости удобно записать в безразмерной форме. Если характерный линейный размер l принять в качестве единицы длины» время τ в качестве единицы времени, температуру начала отсчета T за единицу измерения температуры и модуль сдвига μ принять в качестве единицы измерения, напряжения то в результате найдем, что уравнения (1.6), (1.14) и (1.15) примут соответственно следующую безразмерную форму:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \alpha\ddot{u}_i, \tag{1.16}$$

$$\sigma_{ij} = \left[\left(\beta^2 - 2\right)\Delta - b\vartheta\right]\delta_{ij} + 2\gamma_{ij} \tag{1.17}$$

$$\nabla^2\vartheta + \overline{\theta} = f\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + g\frac{\partial\Delta}{\partial t} \tag{1.18}$$

где

$$X_i = \frac{l\rho}{\mu}F_i, \quad \overline{\theta} = \frac{Ql^2}{kT}$$

обозначают новые функции и

$$\alpha = \left(\frac{l}{c^2\tau}\right)^2, \quad b = \frac{\gamma\mathrm{T}}{\mu}, \quad f = \frac{\rho c l^2}{k\tau}, \quad g = \frac{\gamma l^2}{k\tau}.$$

При определении a величина $(\mu/\rho)^{\frac{1}{2}}$ была заменена скоростью c^2 распрост-ранния S-волн в теле.

Величина $\beta^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}$ представляет квадрат отношения скорости P – волн к скорости S – волн.

2. Математическая модель прямой задачи термоупругости

В общем случае постановка задачи термоупругости заключается в следующем. Необходимо при заданных механических и тепловых воздействиях определить 16 функций координат x и времени t: шесть компонентов тензора напряжения σ_{ij} шесть компонентов тензора деформации ε - три компонента вектора перемещения ε_{ij} и температуру T, удовлетворяющих: трем уравнениям движения (2.1); шести соотношениям между напряжениями и деформациями (2.2) или (2.3); шести соотношениям между деформациями и перемещениями (2.4); уравнению теплопроводности (2.5), при определенных начальных и граничных условиях.

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho\ddot{u}_i \tag{2.1}$$

Здесь ρ – плотность, $\rho\ddot{u}_i$ – силы инерции.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left[\lambda\varepsilon_{RR} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)\right]\delta_{ij} \tag{2.2}$$

где λ и μ – коэффициенты Ляме при изотермической деформации.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij}}{E} - \nu\frac{\sigma_{RR}}{E}\delta_{ij} + \alpha_T (T - T_0)\delta_{ij} \tag{2.3}$$

E – изотермический модуль упругости; ν - коэффициент Пуассона.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{ij} + u_{ji}\right) \tag{2.4}$$

$$\left(\lambda_q T, i\right)i + \omega_0 = TS \tag{2.5}$$

где u_i – вектор перемещения, S – плотность энергии; λ_q – коэффициент теплопроводности; ω_0 – удельная мощность (количество тепла, произведенного за единицу времени в единицу объема) источников тепла.

Начальные условия обычно задаются в виде распределений компонентов вектора перемещения u_i, их скоростей $\dot{u}_i$ и температуры T во всей области V упругого тела:

$$u_i = q_i(x_R),\ \dot{u}_i = h_i(x_R),\ T = f(x_R) \quad \text{при } t = 0. \tag{2.6}$$

Здесь и дальше обозначения $q_i(x_R)$, $h_i(x_R)$, $f(x_R)$ означают функции всех координат x_R (R = *1, 2, 3*) в рассматриваемой области.

Граничные условия на поверхности Ω упругого тела, ограничивающей его объем V, складываются из механических и тепловых условий.

Механические граничные условия задаются либо в перемещениях, либо в напряжениях

$$u_i = g_i(x_R, t) \quad \text{при } t>0, \tag{2.7}$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_i(x_R, t) \quad \text{при } t>0, \tag{2.8}$$

f_i — компоненты вектора поверхностной силы; n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Ω.

В качестве теплового граничного условия применяется одно из граничных условий теории теплопроводности. Механические и тепловые граничные условия могут быть также смешанными. На одной части поверхности механические граничные условия могут быть заданы в перемещениях (2.7), а на другой — в напряжениях (2.8). Тепловое граничное условие на одной части поверхности тела задается, например, тем-пературой, а на другой — законом конвективного теплообмена с окружающей средой.

Система уравнений (2.1), (2.2) или (2.3), (2.4) и (2.5) при указанных начальных граничных условиях описывает ***связанную нелинейную задачу термоупругости.***

При $(T - T_0)/T_0 << 1$ значения упругих и термических коэффициентов и удельных теплоемкостей предполагаются постоянными, вместо уравнения (2.5) применяется уравнение (2.9), и связанная задача термоупругости становится линейной.

$$\lambda_q T_{ii} + \omega_0 = c_\varepsilon \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0 \dot{\varepsilon}_{RR} \tag{2.9}$$

Доказано, что для области V, свободной от объемных сил и источников тепла, решение системы уравнений (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) при начальных и граничных условиях, заданных через перемещения и температуру, является единственным. Это доказательство можно обобщить и на другие механические и тепловые воздействия и граничные условия.

Составим для этой задачи уравнения движения в перемещениях. Выражая в уравнениях (2.1) напряжения через деформации по формуле (2.2) и учитывая, что члены, содержащие ε_{RR} и T, сохраняются только при i - j, получаем

$$2\mu\varepsilon_{ij,j} + \lambda\varepsilon_{RR,i} + F_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)_i - \rho\ddot{u}_i = 0. \tag{2.10}$$

В этом уравнении деформации заменяем перемещениями. Заменяя j индексом R и учитывая, что $u_{R,iR} = u_{R,Ri}$, находим

$$\mu u_{i;RR} + (\lambda + \mu)u_{R,Ri} + F_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)_i - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11) совместно с уравнением (2.9) при определенных начальных и граничных условиях описывают изменение в пространстве и во времени поля деформации и температурного поля. Представим эти уравнения в векторной форме:

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\, grad\, div\vec{u} + \vec{F} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T\, grad(T - T_0) - \rho\ddot{\vec{u}} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a}T - \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_q}\, div\,\dot{\vec{u}} = 0 \quad (2.13)$$

где $a = \lambda_q / c_\varepsilon$ коэффициент температуропроводности.

3. Виды задач: связанная и несвязанная

Термоупругая деформация тела, возникающая от нестационарных механических и тепловых воздействий, сопровождается обратным эффектом-изменением его температурного поля. Задача термоупругости, в которой учитывается указанный эффект, называется связанной динамической задачей термоупругости.

Эффекты связанности. Законы термодинамики гласят, что изменение деформаций упругого тела сопровождается изменением его температуры, при котором возникает теплопоток, обусловливающий увеличение энтропии термодинамической системы и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии.

В металлических телах эффект связанности поля деформации и температурного поля обычно мало влияет на термическое возмущение и распределение тепловых напряжений. Но это не значит, что подобное положение сохранится и для новых материалов, обладающих большим параметром связанности.

При учете эффекта связанности устанавливаются новые качественные особенности распространения упругих волн, которые под влиянием тепловых эффектов распространяются с затуханием и дисперсией. В частности, существенно различаются решение динамической задачи термоупругости о тепловом ударе на поверхности полупространства без учета связи полей деформации и температуры и решение с учетом этой связи; в случае «несвязанного» решения разрыв напряжения αх остается неизменным, тогда как при «связанном» он с течением времени быстро уменьшается.

В работе, связанная задача термоупругости рассматривается при малом термическом возмущении, т. е. при $(T - T_0)/T_0 \ll 1$.

В этом случае связанная задача становится линейной и при формулировке ее в перемещениях сводится к решению системы уравнений (2.12) и (2.13).

Представления общего решения. Связанная задача термоупругости при малом термическом возмущении описывается системой уравнений (2.12) и (2.13) при начальных и граничных условиях. При объемной силе

$$\vec{F} = grad\Pi + rot\,\vec{\chi} \quad (3.1)$$

известно следующее представление общего решения уравнений (2.12) и (2.13):

$$u = grad\Phi + rotA \quad (3.2)$$

$$T - T_0 = \frac{1}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}\left[(\lambda+2\mu)\,\Diamond_1^2\Phi + \Pi\right],$$

в котором скалярная Φ и векторная $\vec{A}$ функции удовлетворяют уравнениям

$$\Diamond^2\left[\Diamond_1^2\Phi + \frac{1}{\lambda+2\mu}\Pi\right] - \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Phi = -\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}{(\lambda+2\mu)\lambda_q}\omega_0; \quad (3.3)$$

$$\Diamond_2^2\vec{A} = -\frac{\vec{\chi}}{\mu} \quad (3.4)$$

$$\Diamond^2 = \nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t} \qquad \Diamond_n^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_n^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (n = 1,2); \quad (3.5)$$

Здесь и в дальнейшем $\Diamond^2 A = \partial^2 A \big/ \partial t^2 - \Delta A$ - оператор Даламбера, Δ - оператор Лапласа, ε — параметр связанности, имеющий значение; c_1 и c_2 — скорость распространения упругой волны соответственно расширения и искажения (см. выражения (3.6)). При $\varepsilon = \Pi = 0$ уравнение (3.3) на основании (3.1) переходит в (3.7)

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (3.6) \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.7)$$

$$\Diamond_1^2 \Phi = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda + 2\mu}(T - T_0) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T (T - T_0) \quad (3.8)$$

при $\vec{\chi} = 0$ *(3.4) переходит в уравнение динамической задачи термоупругости.*

$$\Diamond_2^2 \vec{A} = 0 \quad (3.9)$$

Задача термоупругости, описываемая двумя уравнениями:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) grad\ div\ \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T grad(T - T_0) - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} T = 0 \quad (3.11)$$

называется несвязанной динамической задачей термоупругости, или просто динамической задачей термоупругости.

При существенном приращении температуры T—T_0 коэффициенты λ, μ, α_T в соотношениях (2.2) являются функциями T, а следовательно, и функциями координат x_R и времени t. Помня об этом и выполняя преобразования находим для такой задачи следующие уравнения движения в перемещениях:

$$\mu u_{i,RR} + (\lambda + \mu) u_{R,Ri} + \mu_{,R} \left(u_{i,R} + u_{R,i}\right) + \lambda_{,i} u_{R,R} - \left[(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)\right]_{,i} - \rho \ddot{u}_i. \quad (3.12)$$

Вместо этих трех скалярных уравнений можно записать одно векторное в виде

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) grad\ div \vec{u} + 2 grad\ \mu \Pi\varepsilon\ grad\ \lambda div \vec{u} - grad\ \left[(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0)\right]_i - \rho \ddot{u}_i \quad (3.13)$$

где $grad\ \mu \cdot \Pi\varepsilon$ — скалярное произведение тензора деформации $\Pi\varepsilon$ на вектор $grad\ \mu$.

Если учесть зависимость λ_q от температуры, то уравнение теплопроводности становится нелинейным.

4. Модель термоупругой среды

Дифференциальные уравнения и соотношения, выражающие законы сохранения массы, импульса, энергии и второй закон термодинамики нужны для общего случая независимо от того, какими конкретными физико-механическими свойствами обладает деформируемая среда, и в силу этого имеют универсальный характер, т.е. справедливы для любых сред. Однако при попытке математического описания движения какой-либо конкретной деформируемой среды (газообразной, жидкой или твердой) довольно легко установить, что имеющихся в распоряжении универсальных дифференциальных уравнений и соотношений не достаточно для составления замкнутой системы уравнений, которая могла бы послужить основой для последующего нахождения единственного решения и получения количественной информации о характере движения и изменения состояния деформируемой среды. При этом очевидна закономерность: количество входящих в составляемую систему уравнений неизвестных величин (характеристических функций) на 6 единиц больше имеющихся в распоряжении уравнений, где 6 - количество независимых компонент симметричных тензоров напряжений и деформаций. Например, приведенная ниже система уравнений адиабатического движения деформируемой среды включает 20 уравнений (одно уравнение неразрывности (4.1), три уравнения движения (4.2), одно уравнение энергии (4.3), три кинематических соотношения взаимосвязи компонент скорости и перемещения (4.4), шесть геометрических соотношений (4.5) и шесть кинематических соотношений (4.6) и 26 неизвестных характеристических функций (плотность, удельная внутренняя энергия, по три компоненты векторов перемещения и скорости, по шесть независимых компонент тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \, \upsilon = 0 , \tag{4.1}$$

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = F_i + \nabla_j \sigma_i^j , \tag{4.2}$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} , \tag{4.3}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \upsilon_i , \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u^k\right) , \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right) . \tag{4.6}$$

Анализ приведенной системы уравнений показывает, что в ней отсутствуют соотношения, учитывающие реакцию деформируемой среды на процесс деформирования и показывающие, какие внутренние напряжения возникают в ней в ответ на деформации. Подобные соотношения в самом общем виде можно записать как

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, T\right) . \tag{4.7}$$

Соотношения вида (4.7) называются физическими соотношениями, они определяют специфику той или иной деформируемой среды в отношении оказания сопротивления деформированию и тесно связаны с понятием модели сплошной среды.

Начальные и граничные условия. Неотъемлемым и важнейшим элементом постановки любой задачи механики сплошных сред является формулировка начальных и граничных условий. Их значение определяется тем, что та или иная система разрешающих уравнений описывает целый класс движений соответствующей деформируемой среды, и лишь задание отвечающих исследуемому процессу начальных и граничных условий позволяет выделить из этого класса представляющий интерес частный случай, соответствующий решаемой практической задаче.

Начальные условия — это условия, которыми задаются значения искомых характеристических функций в момент начала рассмотрения исследуемого процесса. Количество задаваемых начальных условий определяется количеством основных неизвестных функций, входящих в систему разрешающих уравнений, а также порядком входящей в эту систему высшей производной по времени. Например, адиабатическое движение идеальной жидкости или идеального газа описывается системой шести уравнений с шестью основными неизвестными — тремя компонентами вектора скорости $\upsilon_i = \upsilon_i\left(x^i, t\right)$, давлением $p = p\left(x^i, t\right)$, плотностью $\rho = \rho\left(x^i, t\right)$ и удельной внутренней энергией $E = E\left(x^i, t\right)$, при этом порядок производных этих физических величин по времени не превышает первый порядок. Соответственно этому в качестве начальных условий должны быть заданы начальные поля этих шести физических величин: при $t = 0$

$$\upsilon_i = \upsilon_i\left(x^i, 0\right), \; p = p\left(x^i, 0\right), \; \rho = \rho\left(x^i, 0\right), \; E = E\left(x^i, 0\right).$$

В некоторых случаях (например, в динамической теории упругости) в качестве основных неизвестных в системе разрешающих уравнений используются не компоненты υ_i вектора скорости, а компоненты u_i вектора перемещения, а уравнение движения содержит производные второго порядка компонент перемещения $d^2 u_i / dt^2$, что требует задания двух начальных условий для искомой функции $u_i = u_i\left(x^i, t\right)$: при $t = 0$ $u_i = u_i\left(x^i, 0\right)$ и $du_i / dt = \upsilon_i\left(x^i, 0\right)$.

Более сложным и разнообразным образом при постановке задач механики сплошных сред задаются граничные условия. Граничные условия — это условия, которыми задаются значения искомых функций (или их производных по координатам и времени) на поверхности S области, занимаемой деформируемой средой. Различают граничные условия нескольких типов: кинематические, динамические, смешанные и температурные.

Кинематические граничные условия соответствуют случаю, когда на поверхности S тела (или ее части) задаются перемещения $u\left(x_s^i, t\right)$ или скорости $\upsilon\left(x_s^i, t\right)$ где $x_s^i = x_s^i(t)$ — координаты точек поверхности S, изменяющиеся в общем случае в зависимости от времени.

Динамические граничные условия (или граничные условия в напряжениях) задаются, когда на поверхности S действуют поверхностные силы p. Как следует из теории напряжений, в этом случае на любой элементарной площадке поверхности с единичным вектором нормали n вектор удельных поверхностных сил pn принудительно задает вектор полного напряжения $\sigma n = pn$, действующий в сплошной среде в точке на данном участке поверхности, что приводит к взаимосвязи тензора напряжений (σ) в этой точке с поверхностной силой и ориентацией вектора п соответствующего участка поверхности: $(\sigma) \cdot n = pn$ или $\sigma_{ij} n^j = p_{ni}$.

Смешанные граничные условия соответствуют случаю, когда на поверхности S задаются значения и кинематических, динамических величин или устанавливаются взаимосвязи между ними.

Температурные граничные условия подразделяются на несколько групп (родов). Граничные условия первого рода задают на поверхности S деформируемой среды определенные значения температуры T. Граничные условия второго рода задают на границе вектор теплового потока q, что с учетом закона теплопроводности Фурье $q = -\lambda\, grad\, T$, по существу, накладывает ограничения на характер температурного распределения в окрестности граничной точки $q_i = -\lambda \nabla_i T$. Граничные условия третьего рода устанавливают зависимость между вектором теплового потока q, направленным к данной среде со стороны окружающей среды, и температурным перепадом между этими средами.

5. Математическая модель обратной задачи термоупругости

Таким образом, несвязанная динамическая задача термоупругости описывается системой дифференциальных уравнений [1]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \qquad i = 1,2,3; \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa\theta, \tag{5.2}$$

где $\theta(x,t)$ - приращение температуры, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ - вектор смещений, σ_{ij} - напряжения:

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\left[\lambda\, divu \;-\; (3\lambda + 2\mu)\int_0^{\theta(x,t)} \alpha(y)dy\right] \tag{5.3}$$

а параметры входящие здесь имеют следующий физический смысл: K - коэффициент температуропроводности, ρ - плотности среды, λ, μ - параметры Ламэ, α - коэффициент теплового расширения, δ_{ij} - символ Кронекера.

Относительно этих параметров предположим, что выполнено следующие условия:

$$\Delta_0 = \{\rho = \rho(x_3) > 0, \mu = \mu(x_3) > 0, \lambda = \lambda(x_3) > 0, \{2\mu(x_3) + \lambda(x_3) > 0\}, \tag{5.4}$$

(5.1), (5.2) рассмотрим со следующими начальными и граничными условиями

$$u_i\big|_{t=+0} = 0, \qquad (\partial u_i / \partial t)\big|_{t=+0} = 0, \tag{5.5}$$

$$\theta(x,t)\big|_{t=+0} = 0, \tag{5.6}$$

$$\sigma_{3i}\big|_{x_3=+0} = f(x_1, x_2, t), \tag{5.7}$$

$$\left(\partial\theta / \partial x_3 - \gamma\theta\right)\Big|_{x_3=+0} = \varphi(x_1, x_2, t), \tag{5.8}$$

Задачу определения $u(x,t)$ и приращение $\theta(x,t)$, из (5.1)-(5.8) при известных, будем называть ***прямой динамической задачей термоупругости.***

Пусть $f_i(x_1, x_2, t) = 0$, а $\varphi(x_1, x_2, t) = -\gamma(T_1 - T_0)$ (5.9)

Решение (5.2),(5.6),(5.8),(5.9) имеет вид [1]:

$$\theta(z,t) = (T_1 - T_0)\left[erfc\left(\frac{z}{(2\sqrt{kt})} - \exp\left(\gamma z + \gamma^2 kt\right) * erfc\left(\frac{z}{(2\sqrt{kt})} + \gamma\sqrt{kt}\right)\right)\right], \tag{5.10}$$

где $erfc = 1 - erf(z)$, $\quad erf(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right) * \int_0^z \exp\left(-\xi^2\right) d\xi, \quad z = x_3,$ (5.11)

Тогда получим задачу (см. [1]):

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u_3}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda(z) - 2\mu(z))\frac{\partial u_3}{\partial z} - (3\lambda(z) + 2\mu(z))R(\theta(z,t))\right] \tag{5.12}$$

$$u_3\big|_{t=+0} = 0, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0 \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z}\Bigg|_{z=+0} = \frac{(3\lambda(0) + 2\mu(0))}{(\lambda(0) + 2\mu(0))} R(\theta(0,t)) \tag{5.14}$$

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad u_3 = u_3(z,t,) \qquad z = x_3, \quad R(s) = \int_0^s \alpha(y)dy,$$

Функция $\theta(z,t)$ - известная, определенная равенством (5.10).

Определение функцию $\alpha(y)$ из (5.12)-(5.14), если относительно решения прямой задачи $u_3(z,t)$ известно, что

$$u_3(0,t) = g(t), \quad t \in [0,T], \tag{5.15}$$

будем называть обратной динамической задачей термоупругости.

Литература:

1. Коваленко А.Д. Термоупргость. - Киев: Изд. АН УССР,1975. - 216с.
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. - М.: Физматлит, 2002. - 168с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жапаров М.