Койшыбаева Ж.Б.

ПРИМЕНИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ К СРАВНИТЕЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ДВУХ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ ПРИ СИНТЕЗЕ НАПРАВЛЯЮЩИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Zk.B. Koyishybaeva

APPLICABILITY OF SOME ФУРЬЕ TO THE COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO CLOSED CURVES AT SYNTHESIS OF DIRECTING LEVER MECHANISMS

УДК: 667/771/02/669

В данной статье рассмотрено применение ряда Фурье к сравнительному анализу двух замкнутых кривых при синтезе направляющих рычажных механизмов.

In given article application of some Fure to the comparative analysis of two closed curves is considered at synthesis of directing lever mechanisms.

При поиске требуемого механизма из каталога механизмов выполняется сравнение шатунной кривой механизма γ с заданной кривой γ^*, которую требуется воспроизвести.

При этом необходимо учесть, что в каталоге хранятся нормализованные механизмы, т.е. в которых $X_A = Y_A = Y_D = 0,\ X_D = 1$, т.е. $AD=1$.

Поэтому при сравнении кривых отыскиваются также параметры поворота всей кривой как целой на угол α и коэффициент растяжения-сжатия кривой j, т.е. кривая подвергается преобразованию $\Gamma(\alpha, j) = \begin{bmatrix} j\cos\alpha & -j\sin\alpha \\ j\sin\alpha & j\cos\alpha \end{bmatrix}$. Кроме того, требуется найти фазовые смещение T в параметризации кривых γ и γ^*. Кроме того, сравниваются кривые без учета сдвига $\vec{a}_0$ и $\vec{a}_0^*$, т.е. кривые рассматриваются относительно центров масс S и S^*.

Разложение в ряд Фурье этих двух кривых имеет вид

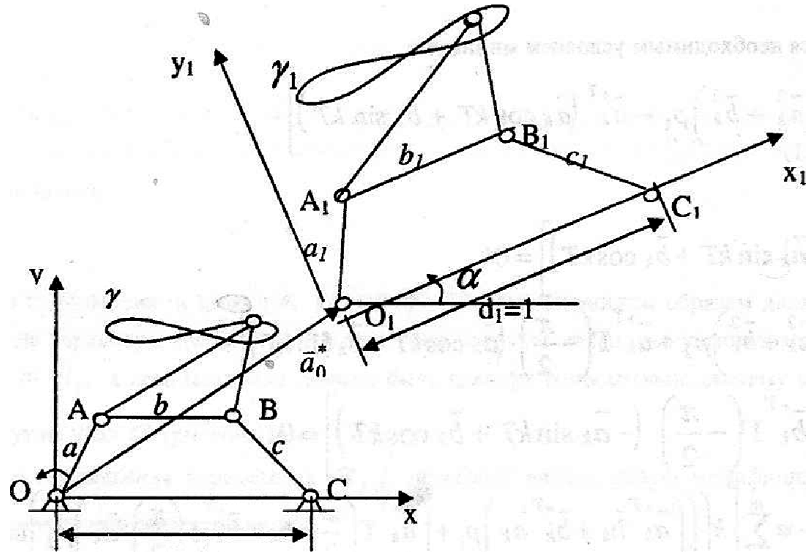

Рис. 1.

$$\vec{r}(\tau)-\vec{a}_0=\sum\left(\vec{a}_k\cos k\tau+\vec{b}_k\sin k\tau\right) \qquad (1)$$

$$\vec{r}^{\,*}(t)-\vec{a}_0^{\,*}=\sum\left(\vec{a}_k^{\,*}\cos kt+\vec{b}_k^{\,*}\sin kt\right) \qquad (2)$$

где $\tau=t+T$. Тогда для определения искомых переменных $\alpha,\ j,T$ можно поставить задачу оптимизации

$$f(\alpha,\ j,T)=\int_0^{2\pi}\left\{\vec{r}^{\,*}-\vec{a}_0^{\,*}-\Gamma(j,\alpha)\left[\vec{r}(t+T)-\vec{a}_0\right]\right\}^2 dt\ \Rightarrow \min \qquad (3)$$

Тогда наихудшее значения отклонения между двумя кривыми определяется из формулы

$$\Delta=\sqrt{\frac{f_{\min}}{2\pi}} \qquad (4)$$

Подставим (1) и (2) в выражение для функции $f(\alpha,\ j,T)$ и, с учетом m членов Фурье

$$f(\alpha,\ j,T)=\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\vec{a}_k^{\,*}-\vec{a}_k^{\,(1)}\right)^2+\left(\vec{b}_k^{\,*}-\vec{b}_k^{\,(1)}\right)^2\right], \qquad (5)$$

где

$$\vec{a}_k^{\,(1)}=\Gamma(\alpha,\ j)\left(\vec{a}_k\cos kT+\vec{b}_k\sin kT\right),\ \vec{b}_k^{\,(1)}=\Gamma(\alpha,\ j)\left(-\vec{a}_k\sin kT+\vec{b}_k\cos kT\right). \qquad (5а)$$

В скалярной форме выражение (5) имеет вид

$$f(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left[\begin{bmatrix} p_1\left(a_k^x\cos kT+b_k^x\sin kT\right)-p_2\left(a_k^y\cos kT+b_k^y\sin kT\right)-a_k^{x*} \\ p_2\left(a_k^x\cos kT+b_k^x\sin kT\right)+p_1\left(a_k^y\cos kT+b_k^y\sin kT\right)-a_k^{y*}\end{bmatrix}^2+\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix} p_1\left(-a_k^x\sin kT+b_k^x\cos kT\right)-p_2\left(-a_k^y\sin kT+b_k^y\cos kT\right)-b_k^{x*} \\ p_2\left(-a_k^x\sin kT+b_k^x\cos kT\right)+p_1\left(-a_k^y\sin kT+b_k^y\cos kT\right)-b_k^{y*}\end{bmatrix}^2\right].$$

где $p_1=j\cos\alpha,\ p_2=j\sin\alpha,\ p_3=T$.

Воспользуемся необходимым условием минимума

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} \equiv \sum_{k=1}^{m}\left[\left(\vec{a}_k^2 + \vec{b}_k^2\right)p_1 - \vec{a}_k^{*T}\left(\vec{a}_k \cos kT + \vec{b}_k \sin kT\right)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\left[\vec{b}_k^{*T}\left(-\vec{a}_k \sin kT + \vec{b}_k \cos kT\right)\right] = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_2} \equiv \sum_{k=1}^{m}\left[\left(\vec{a}_k^2 + \vec{b}_k^2\right)p_2 + \vec{a}_k^{*T}\Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\vec{a}_k \cos kT + \vec{b}_k \sin kT\right)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\vec{b}_k^{*T}\Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\vec{a}_k \sin kT + \vec{b}_k \cos kT\right)\right] = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_3} \equiv \sum_{k=1}^{m}\left[k\left(\left(\left(\vec{a}_k^{*T}\vec{b}_k + \vec{b}_k^{*T}\vec{a}_k\right)p_1 + \left(\vec{a}_k^{*T}\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{b}_k - \vec{b}_k^{*T}\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{a}_k\right)p_2\right)\cos kT +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left(\vec{a}_k^{*T}\vec{a}_k + \vec{b}_k^{*T}\vec{b}_k\right)p_1 - \left(\vec{a}_k^{*T}\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{a}_k + \vec{b}_k^{*T}\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{b}_k\right)p_2\right)\sin kT\right)\right] = 0. \tag{8}$$

отсюда в скалярной форме получим 3 уравнения:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\vec{a}_k^2 + \vec{b}_k^2\right)p_1 - a_k^{x*}g_{1_k} - a_k^{y*}g_{2_k} - b_k^{x*}g_{3_k} - b_k^{y*}g_{4_k}\right] = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\vec{a}_k^2 + \vec{b}_k^2\right)p_2 + a_k^{x*}g_{2_k} - a_k^{y*}g_{1k} + b_k^{x*}g_{4_k} - b_k^{y*}g_{3_k}\right] = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[k\left[\left(-a_k^{x*}g_{3k} - a_k^{y*}g_{4k} + b_k^{x*}g_{1k} + b_k^{y*}g_{2k}\right)p_1 + \left(a_k^{x*}g_{4k} - a_k^{y*}g_{3k} - b_k^{x*}g_{2k} + b_k^{y*}g_{1k}\right)p_2\right]\right] = 0$$

где $g_{1k} = a_k^x \cos kT + b_k^x \sin kT$;

$g_{2k} = a_k^y \cos kT + b_k^y \sin kT$;

$g_{3k} = -a_k^x \sin kT + b_k^x \cos kT$;

$g_{4k} = -a_k^y \sin kT + b_k^y \cos kT$;

Откуда определяем переменные p_1, p_2.

$$p_1 = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left[a_k^{x*}g_1 + a_k^{y*}g_2 + b_k^{x*}g_3 + b_k^{y*}g_4\right]}{\sum_{k=1}^{m}\left[\vec{a}_k^2 + \vec{b}_k^2\right]}; \tag{9}$$

$$p_2 = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left[-a_k^{x*}g_2 + a_k^{y*}g_1 - b_k^{x*}g_4 + b_k^{y*}g_3\right]}{\sum_{k=1}^{m}\left[\vec{a}_k^2 + \vec{b}_k^2\right]}; \tag{10}$$

После определения переменных p_1, p_2, искомые переменные α и j определяются по формулам

$$\alpha = arctg\frac{p_2}{p_1}, \tag{11}$$

$$j = \sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2}}\,. \tag{12}$$

Кривая γ после преобразования вида

$$\vec{r}_1 = \Gamma(\alpha, j)\vec{r} - \vec{a}_0^{\,*} \tag{13}$$

будет в наибольшей степени приближена к заданной кривой γ^*. Соответствующим образом должны быть преобразованы геометрические параметры механизма: все линейные размеры механизма увеличиваются (или уменьшаются) в j раз: $l_i' = jl_i$, а весь механизм должен быть сдвинут относительно систему координат OXY на вектор $\vec{a}_0^{\,*}$ и повернут на угол α (рисунок 1).

Возможность аналитического определения переменных α, j позволяет ввести новую модифицированную целевую функцию f_m, зависящую от одной переменной T:

$$f_m(T) = f^0(\alpha(T), j(T), T) \tag{14}$$

где $\alpha(T)$ и $j(T)$ определяются выражениями (11), (12) с учетом (9) и (10). При этом важно заметить, что необходимые условия минимума (6) и (7) являются также и достаточными условиями минимума.

Для этого достаточно проверить гессиан-матрицу вторых производных

$$A = \frac{d^2 f}{d[p_1, p_2]^2}.$$

Элементы этой матрицы будут следующие:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^{\,2}} = \sum_{k=1}^{m}(\bar{a}_k^{\,2} + \bar{b}_k^{\,2}); \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^{\,2}} = \sum_{k=1}^{m}(\bar{a}_k^{\,2} + \bar{b}_k^{\,2});$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2} = 0.$$

Отсюда очевидно, что гессиан положительно определен вместе с главным минором:

$$a_{11} > 0,\ \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \left[\sum(\bar{a}_k^{\,2} + \bar{b}_k^{\,2})\right]^2 > 0.$$

После того, как механизм найден, проверяем, будет ли рабочая область механизма (геометрическое место точек на плоскости, занимаемых всеми точками звеньев во время работы) находиться в заданной проектировщиком области D_M. Кроме того, стойки механизма должны лежать в заданных областях D_1 и D_2 и т.д. Как область механизма D_M, так и области стоек D_1, D_2 и т.д. задаются в виде многоугольников, т.е. в виде линейных ограничений вида

$$A_i x + B_i y + C_i \geq 0 \tag{15}$$

Литература:

1. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. - М.: Наука, 1982. -304 с.
2. Левитский Н.И. Приближенный синтез шарнирных механизмов с двумя степенями свободы. - Труды ИМАШ АН СССР. Семинар по ТММ. Вып. 83-84. -М.:Изд.-во АН СССР, 1961. -Том 21. -с. 103-113.
3. Ибраев СМ. Функциональный синтез и анализ плоских параллельных манипуляторов. - Алматы: Гы-лым, 1996. - 198с.
4. Ibrayev, S., Synthesis of Planar Adjustable 4Bar Mechanisms with Variable Length of Two-Element Link. -Kolloquium Getriebetechnik 1999, Technische Universitaet Muenchen, Garshing, 20-6, 21.Sept. 1999, s. 111-120.

Рецензент: д.т.н., профессор Жанбыров Ж.Г.