

Зулпуев А.М.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
В МЕТОДЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

A.M. Zulpuev

**DEFINITION OF INTERNAL EFFORTS OF BOUNDARY CONDITIONS
IN THE METHOD OF THE CONCENTRATED STRAIN**

УДК: 624.012.45.624.012.35

В данной статье рассмотрены наиболее распространенные условия закрепления стержней на концах и промежуточных опорах, приведены сопоставления прогибов консольного стержня с аналитическими решениями, рассчитанных на основе метода сосредоточенных деформаций с использованием ЭВМ.

This article describes the most common conditions for securing the rods at the ends and intermediate supports, are comparisons of deflections cantilever rod with analytical solutions, calculated on the basis of concentrated strain using a computer.

Рассмотрим наиболее распространенные условия закрепления стержней на концах и на промежуточных опорах.

Во всех этих случаях число элементов МСД принимается постоянным, и каждый из них имеет три степени свободы (рис. 1), т.е. общее число неизвестных метода перемещений принимается независимым от условий закрепления.

Опорные реакции, в зависимости от их характера, входят в решениях по МСД как векторы внут-

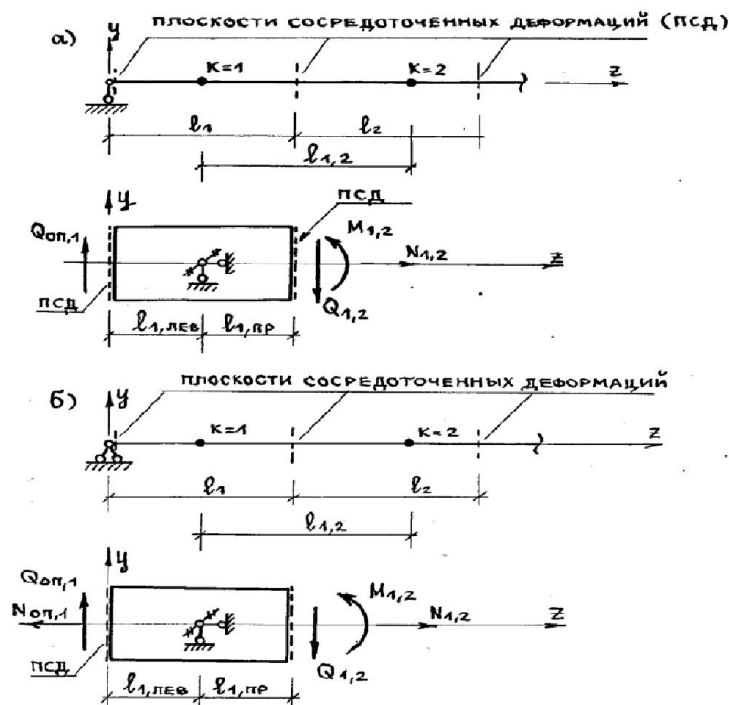
ренних сил с соответствующими матрицами жесткости.

Таким образом, в принятом подходе степень внешней статической неопределимости исходной рассчитываемой системы не влияет на сложность расчета.

При шарнирном подвижном описании стержня на конце (рис. 1, а опорная реакция равна поперечной силе $Q_{оп,1}$, которой соответствует элемент матрицы жесткости $(GA) / \chi_{1,лев}$ где $\chi_{1,лев}$ - сдвиговая жесткость на левом участке опорного элемента МСД.

При шарнирно-неподвижном опирании внутренние силы - опорные реакции состоят из поперечной силы $Q_{оп,1}$ и продольной силы $N_{оп,1}$, последней соответствует элемент в матрице жесткости (рис. 1, б).

При защемленной опоре к ним добавляется изгибающий момент $M_{оп,1}$, которому соответствует жесткость условной податливой связи.



Таким образом, опорные реакции связываются с элементами матрицы жесткости и соответствующими перемещениями первого элемента МСД следующими соотношениями

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_{оп,1} = l^{-1}_{оп,1} * \begin{bmatrix} EA & & \\ & EJ & \\ & & GA/\chi \end{bmatrix}_{оп,1} * \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \varphi_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

или $\{F\}_{он,1} = [\mathcal{E}]_{он,1} * \{v\}_1$ (1)

При податливом опирании на конце эти же опорные реакции будут находиться также по формулам (1), но опорная матрица жесткости должна содержать элементы жесткости упругого закрепления, т.е. она будет вычисляться по формуле:

$$[\mathcal{E}]_{он,1}^* = \left[[\mathcal{E}]_{он,1}^{-1} + [\mathcal{E}]_{св.}^{-1} \right]^{-1} \quad (2)$$

где: $[\mathcal{E}]_{он,1}$ принимается из формулы (1), а матрица, характеризующая свойства связей закрепления, будет равна

$$[\mathcal{E}]_{св.} = \begin{bmatrix} \eta_{св} & & \\ & \omega_{св} & \\ & & \xi_{св} \end{bmatrix} \quad (3)$$

где $\eta_{св}$ - продольная сила, возникающая в элементе МСД при его единичном перемещении $\omega_1=1$ из-за сопротивления связи; $\omega_{св}$ - изгибающий момент в элементе МСД при угле поворота $\varphi_1=1$; $\xi_{св}$ - поперечная сила от перемещения $v_1=1$.

Из структуры формулы (3) видно, что она является общей и позволяет описать любые условия закрепления стержня на конце - от полного защемления до свободной консоли.

Защемление будет иметь место при $\eta_{св} \rightarrow \infty, \omega_{св} \rightarrow \infty, \xi_{св} \rightarrow \infty$; свободный конец описывается (3) при $\eta_{св} = 0, \omega_{св} = 0, \xi_{св} = 0$;

Аналогичным образом учитываются условия описания элементов МСД на промежуточных узлах.

Перейдем к отысканию внутренних усилий в статически неопределимой системе.

Решение системы уравнений метода перемещений (4) дает вектор $\{v\}$ - составляющими которого являются перемещение элементов МСД (ω, φ и v для каждого).

Принимая деформации, постоянными в пределах между узлами закрепления соседних, "(к-1)"-го и "к"-го элементов МСД, получим, учитывая правило знаков для усилий и перемещении:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= (\omega_k - \omega_{k-1})/l_{k,k-1}; \\ K_x &= (\varphi_k - \varphi_{k-1})/l_{k,k-1}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\gamma_y = (-v_k + \varphi_k * l_{k,лев.} + v_{k-1} + \varphi_{k-1} * l_{k-1,пр})/l_{k,k-1}$$

Теперь, по найденным деформациям, пользуясь соотношениями найдем внутренние усилия во всех интересующих сечениях.

Для вычисления внутренних сил можно использовать также соотношение [4]

$$\{F\} = [\mathcal{E}] * \{\Delta v\} \quad (5)$$

где: $\{\Delta v\}$ - сосредоточенные деформации (взаимные перемещения соседних узлов);

$$\{\Delta v\} = -[A]^T \{v\} \quad (6)$$

Так, для тех же "(к - 1)"-го и "к"-го элементов для матрицы $[A]$, получим формулы для взаимные перемещений, совпадающие с приведенными в (4).

Точность численных методов расчета, каковым является также и метод сосредоточенных деформаций, определяется рядом обстоятельств: гипотезами и допущениями, заложенными в основу метода, степенью дискретизации, конкретными особенностями задачи, применяемыми вычислительными средствами и т.д.

Обычно оценки точности численных методов расчета строятся на сопоставлениях результатов с полученными аналитическими или другими альтернативными методами строительной механики.

Объект сопоставления следует брать несложным в расчетном отношении, лишенным каких-либо специфических особенностей, хорошо обозримым и легко анализируемым.

В данном случае точность метода сосредоточенных деформаций можно оценить на балках, для которых имеются аналитические решения и справочные таблицы.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. Консольный стержень (рис. 3, а), за-груженный на конце сосредоточенной силой Y_0 .

Вычислим прогибы на конце стержня и сопоставим их с аналитически найденными. При этом пренебрежем влиянием деформаций сдвига.

Изогнутая ось такого стержня по модели метода сосредоточенных деформаций будет иметь вид многоугольника, сторонами которого являются элементы МСД длиной $l=L/n$, где n - число элементов МСД.

Прогиб такого стержня будет определяться поворотом (изломом) этих элементов по линиям сосредоточенных деформаций. Этот прогиб можно записать, не прибегая к численной реализации по методу перемещений, так как рассчитываемая система - консольный стержень - является статически определенной. Прогиб на конце при $Z=L$ составит

$$v_n = l(\varphi_1 n + \varphi_2 (n-1) + \dots + \varphi_n (n-(n-1))) \quad (7)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, углы поворота элементов МСД.

Углы поворота можно выразить через изгибающие моменты и элементы матрицы жесткости, т.е.

$$\varphi_j = M_j / (EJ / l) \quad (8)$$

Изгибающие моменты по линиям сосредоточенных деформаций будут равны

$$M_j = Y_0 L (n-1) \quad (9)$$

Подставляя (9) и (8) в (7), получим

$$v_n = \frac{Y_0 L^3}{EJ} \frac{1}{n^3} (n^2 / 2 + (n-1)^2 + \dots + (n-(n-1))^2) \quad \text{или} \quad (10)$$

$$v_n = \frac{Y_0 L^3}{EJ} \frac{1}{n^3} (\sum_1^n n^2 - n^2 / 2)$$

Прогиб консольного стержня, как известно из элементарных аналитических решений, вычисляется по формуле

$$v_n = Y_0 L^3 / 3EJ \quad (11)$$

Выполним расчеты по формуле (10) и (11) и сопоставим прогибы при различных значениях n ; результаты вычислений приведены в табл.1.

Таблица 1.

Сопоставление прогибов, вычисленных по МСД и аналитически

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\Delta v, \%$	12,5	5,5	3,1	2,0	1,3	1,0	0,8	0,6	0,5	0,125

В [1] приведены сопоставления прогибов консольного стержня, рассчитанного по МСД с использованием ЭВМ с аналитическими решениями по известным формулам [3] с учетом деформаций сдвига. Расчеты показали хорошую сходимость уже при $n=4$.

Пример 2. Консольный стержень (рис. 3,б) загружен сосредоточенным моментом на конце M_0 . Прогиб стержня вследствие деформаций связей изгиба при элементах МСД можно записать по формуле (7) с использованием формулы (8), учитывая, что

$$M_1 = M_2 = \dots = M_n = M_0$$

Тогда

$$v_n = (M_0 L^2 / EJn^2)(n/2 + (n-1) + (n-2) + \dots + (n - (n-1)))$$

Этот же прогиб из аналитического решения равен

$$v_n = M_0 L^2 / 2EJ \quad (13)$$

Вычисления по (12) и (13) дают одинаковые прогибы при любом числе n , т.е. в данном случае решение по методу сосредоточенных деформаций является точным.

Пример 3. Однопролетная балка, закреплённая на одном конце и шарнирно-опертая на другом конце, нагружена равномерно распределённой нагрузкой (рис. 3, в).

Расчет этой балки выполнялся на ЭВМ по методу сосредоточенных деформаций [2] с учетом физической нелинейности железобетона, на рис. 3, в представлены изгибающие моменты для упругого решения (первой итерации).

Приведенные здесь сопоставления по прогибам и усилиям для некоторых балочных элементов показывают, что метод сосредоточенных деформаций обладает требуемой для практики точностью.

Вполне естественно также, что с уменьшением размеров элементов МСД, точность результатов повышается.

Метод сосредоточенных деформаций направлен, на расчет стержней переменного поперечного сечения и систем из таких стержней. Переменность жесткости по длине объясняется наиболее существенным свойством железобетона - физической нелинейностью.

Изложенные оценки точности МСД позволяют судить о требуемой степени дискретизации стержня, жесткость которого меняется в пределах пролета по некоторому неизвестному закону. Из приведенных примеров следует, что при достаточно гладких кривых прогибов и эпюр изгибающих моментов можно назначать $n = 8-10$; в более сложных схемах нагружения и условиях описания степень дискретизации следует увеличить до $n = 15-20$.

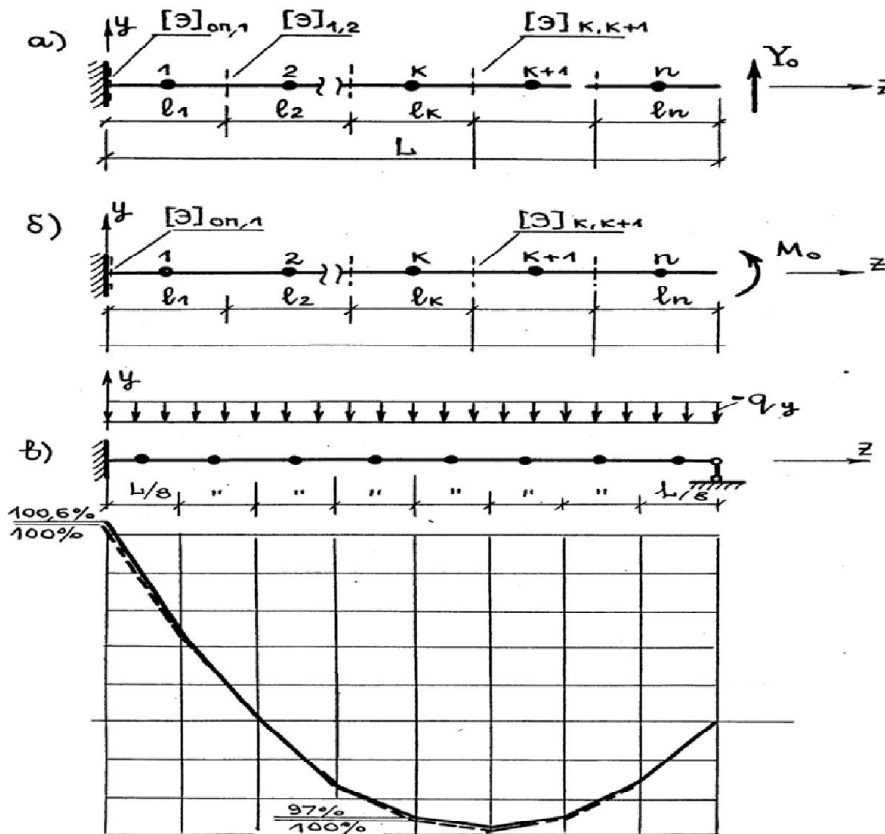


Рис. 3. Примеры расчета стержней для оценки точности МСД; а - консольный стержень с поперечной силой на конце; б - консольный стержень с изгибающим моментом на конце; в - балка.

Литература:

1. Додонов М.И. Развитие и применение метода сосредоточенных деформаций к расчету проемных диафрагм многоэтажных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1984. - № 6. - С. 65 - 69.
2. Додонов М.И., Фролов А.К., Поздеев В.М. расчет железобетонных статически неопределимых элементов методом сосредоточенных деформаций. - М.: ВНИИИС Госстроя СССР. - 1986. - вып.3. - деп. № 1347.
3. Медведько В.Н. Расчет диафрагм зданий повышенной этажности.- В кн.: Исследования по строительным конструкциям. - М., ЦНИИСК. - 1970. - вып. 12. - С. 59-66.
4. Ржаницын А.Р. Расчет сплошных конструкций методом упругих сосредоточенных деформаций. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1980. - № 5. - С. 15-20.

Рецензент: д.т.н., профессор Маруфий А.Т.