Рудаков С.Э.

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ ПО КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

S.E. Rudakov

INTRODUCTORY LESSON ON COMPLEX NUMBERS IN THE SECONDARY SCHOOL

УДК: 372.8 (511.147)

В статье рассмотрены причины, приводящие к расплывчатому пониманию темы комплексных чисел учащимися старших классов и студентами. Приведен план вводного занятия по комплексным числам для учащихся средней школы. Такое занятие может быть полезным и для студентов как напоминание комплексных чисел перед изучением теории комплексного переменного.

In this article the reasons leading to indistinct understanding of the subject of complex numbers by the upperclassmen and the students have been considered. The plan of introductory lesson on complex numbers for the high school students has been given. Such lesson can be also useful for the higher school students as a reminder of complex numbers prior to studying complex variable theory.

Учащиеся старших классов и даже студенты вузов не всегда хорошо понимают комплексные числа. Речь идет как о технике работы с комплексными числами, так и о понимании природы мнимой единицы. Это связано с тем, что принятая практика вводит понятие мнимой единицы i без предыстории. То есть первичным является символ, который потом определяется как корень квадратный из минус единицы или, что ещё сложнее, как $i^2 = -1$ [2]. Развитие темы так же идет от символа. Создается впечатление, что вводится новая, до сих пор не рассматриваемая, сущность. Разорвана связь с усвоенными ранее действиями с корнями. Добросовестный учащийся тратит время и силы, чтобы вникать и заучивать арифметические операции с новой символикой.

В действительности символ, i был введен лишь для сокращения письма, для улучшения читабельности. Никакого смысла, сверх того что несет в себе $\sqrt{-1}$ символ i не имеет.

Все это учащийся начинает понимать, получив некоторый опыт работы с комплексными числами. Оказывается, если везде менять символ i на $\sqrt{-1}$, то математические выражения приобретают привычный вид действий с корнями.

Восстановив, очень бегло, всего лишь на одном занятии, историческую последовательность возникновения мнимой единицы удается устранить налет таинственности. Исчезает необходимость специально определять и заучивать математические (в рамках средней школы) операции над комплексными числами. Математические операции над комплексными числами это те же самые арифметические действия и действия со степенями с обычными, действительными числами.

Приведем примерный план вводного занятия на комплексные числа.

1. Предлагается решить несколько примеров на корни с доведением ответа до «кондиции».

Упростить выражение $\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}\right)^2$. Ответы вида $21+2\sqrt{15}*\sqrt{6}$ или $21+2\sqrt{90}$ не являются законченными. Законченный ответ $21+6\sqrt{10}$. Не следует так же извлекать приближённое значение корня из десяти.

2. Вычислить: $\sqrt{21}*\sqrt{33}*\sqrt{77}$

$$\sqrt{21}*\sqrt{33}*\sqrt{77}=\sqrt{3*7}*\sqrt{3*11}*\sqrt{7*11}=$$

$$=\sqrt{3*3}*\sqrt{7*7}*\sqrt{11*11}=3*7*11=231$$

Акцентируется внимание на том, что числа из под знака корня одного сомножителя можно переносить под знак корня другого сомножителя.

3. Предлагается решить задачу «домик»: Сторона квадрата, является одновременно гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника. Длина катета этого треугольника равна двум. Найти площадь квадрата.

Решение: гипотенуза равна $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$, площадь квадрата $\left(\sqrt{8}\right)^2=8$.

Отмечаем, что при решении задачи промежуточным результатом была иррациональность. Далее, не избавляясь от иррациональности, получен ответ 8 – рациональное число.

4. Напомнить учащимся, что решением любого, в том числе квадратного, уравнения является число, обращающее исходное уравнение в верное равенство.

5. Напомнить теорему Виета – сумма корней квадратного уравнения взятая с отрицательным знаком равна второму коэффициенту приведенного квадратного уравнения, а произведение корней равно третьему коэффициенту.

6. Предлагается решить квадратное уравнение (не имеющее действительных корней), например: $x^2-6x+13=0$. Учащиеся определяют, что дискриминант отрицательный, следовательно,

уравнение решения не имеет. Учитель предлагает, тем не менее, довести решение до «кондиции», как это делалось в первом примере.

Ответ $x_1 = 3 - 2\sqrt{-1};\ x_2 = 3 + 2\sqrt{-1}$.

Предлагается один из корней подставить в исходное уравнение и убедиться, что оно обращается в ноль.

Предлагается по теореме Виета вычислить второй и третий коэффициенты уравнения.

7. У учащихся могут возникнуть вопросы, действительно ли корень квадратный из минус шестнадцати равен четырем корням квадратным из минус единицы. Действительно ли корень квадратный из минус единицы умноженный на себя равен минус единице. Ответы в обоих случаях утвердительные.

Учитель отмечает, что при выполнении всех предложенных заданий корень квадратный из минус единицы *не извлекался!* Что с отрицательным числом под знаком корня поступили так же как с иррациональностью в задаче «домик». То есть, не извлекая квадратного корня из минус единицы, не избавляясь от иррациональности в промежуточных вычислениях, в ответе получили действительное число и рациональное число соответственно.

8. Вводится терминология комплексных чисел:

8.1. «Итак, вы *знаете* комплексные числа и *умеете* обращаться с ними. Необходимо только дать названия тому, что вам уже известно».

8.2. «В математике принято корень квадратный из минус единицы *ради сокращения письма* обозначать через i. Корень квадратный из минус единицы *называют* мнимой единицей». Предлагается учащимся переписать вычисление коэффициентов квадратного уравнения по теореме Виета с использованием символа i.

8.3. «Определение: Комплексными числами называют выражения вида $a + b\sqrt{-1}$, где $a \leq b$ - действительные числа».

8.4. Рассмотрим пример: Найти i^2

Решение.

Вариант 1. $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}*2} = -1$

Вариант 2. $i^2 = (\sqrt{-1}) = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = \pm 1$

Во втором варианте появилось второе решение, $\mathrm{i}^2 = +1$. Произошло это потому, что -1 сначала возвели в квадрат, потом *извлекли* корень. В первом же варианте корень *не извлекался*. Таким образом, правильным и единственным решением будет $\mathrm{i}^2 = -1$. Именно поэтому современным определением комплексных чисел служит следующее определение:

«Комплексными числами называют выражения вида $a + b$i, где a и b – действительные числа, i – такое комплексное число, что $\mathrm{i}^2 = -1$»

8.4. «Впредь использовать символ i для обозначения $\sqrt{-1}$».

8.5. Ввести другие понятия комплексных чисел (действительной части, мнимой части и т. д.) по учебнику [1].

9. В заключение несколько фраз о комплексных числах.

9.1. Не следует искать какого либо смысла в символе i.

9.2. Диалог:

Вопрос - что получится, если извлечь корень квадратный из минус единицы?

Ответ - i содержит ошибку и в вопросе, и в ответе. Так как в выражении $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ знак равенства имеет смысл «называется», а не математическое действие. В любом тексте и формулах можно заменить символ мнимой единицы «i» на $\sqrt{-1}$, от этого изменится объем текста и только.

9.3. Вопрос: «Как правильно записать: $\sqrt{-2}$ или $\sqrt{-1} * \sqrt{2}$ или $\mathrm{i}\sqrt{2}$?»

Ответ: «Все три записи правильные, общепринятой же является запись $\mathrm{i}\sqrt{2}$ ».

9.4. Впервые с мнимой единицей математики столкнулись при решении кубических уравнений. Исходное кубическое уравнение содержало действительные коэффициенты. Корень так же был действительным числом. Промежуточные же действия содержали арифметические операции с квадратным корнем из отрицательного числа. И никаким образом невозможно было избавиться от отрицательных чисел под знаком корня. Хотя, если продолжать выполнять математические действия, то после всех необходимых преобразований квадратные корни из минус единиц либо перемножались, либо сокращались, либо взаимно уничтожались. $\sqrt{-1}$, возникший при решении кубических уравнений - такая же математическая абстракция, как и иррациональное число $\sqrt{2}$.

В дальнейшем мнимые числа оказались весьма полезным, удобным, но не всегда обязательным, математическим инструментом.

Литература

1. Алгебра: учеб. для 8 классов общеобразоват. Учреждений [Ш. А. Алимов и др.] – М.: Просвещение, 2005 г.
2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: «Наука», 1984 г.
3. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. Статья «Неприводимый случай кубического уравнения», врезка «Кое-что о квадратных уравнениях». М.: Аванта+, 2002г.

Рецензент: профессор Ногаев М.А.