

Муңайтпасова Г.Ж., Надырбекова Л.

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗДИН ЭЛЕМЕНТТЕРИН ЖОГОРКУ КЛАССТАРДА ОКУТУУ

Муңайтпасова Г.Ж., Надырбекова Л.

ОБУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В СТАРШИХ КЛАССАХ

Кыргыз Республикасынын стратегиялык пландарында ар тараптан өнүккөн жана дүйнөгө илимий кез караштары калыптанган жаш муундарды тарбиялоо негизги маселелердин катарында. Ошондуктан, бул актуалдуу проблеманы чечүү жалпы билим берүү мектептердеги, билимдин бир булагы болгон, математиканы терең окутуу, заманбап адистерди тарбиялоо, ар бир математика мугалиминин кесиптик милдети. Жогорку окуу жайдан талаптагыдай теориялык билим алгандыгына карабастан, мугалимдин кесиптик-практикалык жактан жогорку деңгээлди камсыз кыла албай жаткандыгы тилекке каршы реалдуу көрүнүш. Мындай кемчиликтерди кыскартуу максатында билим берүү министрлиги тарабынан жетектелген, илимий негизде иштелип чыккан окуу методикалык комплекстердин, колдонмолордун жана көрсөтмөлөрдүн арбын чыгарылышы зарыл жана аларга мугалимдер муктаж.

Бул макалада жогорку класстарга алгебра жана анализдин башталышы курсунун айрым темалары традициялуу методдордун жардамында окутуунун методикасы сунуш кылабыз. Бул түшүнүктөрдү талаптагыдай деңгээлде окутуу, окуучулардын логикалык ой жүгүртүүлөрүн, математика илимине болгон кызыгууну арттырууну жана теориялык билимди практика менен айкалыштыра билуусун калыптандырат деген ойдобуз.

№ 1 теманын аталышы: Функциянын негизги касиеттери.

2.1. Функцияны изилдөө

Максат: Функцияны изилдөө жана анын графиктин тургузуу схемасын иштеп чыгуу.

Сабактын жүрүшү.

I. Сабактын темасын жана максатын баяндоо.

II. Өтүлгөн материалды кайталоо жана бекемдөө.

1. Үй тапшырмасы боюнча суроолорго жооп берүү (чыгарылбаган эсептерди талдоо).

2. Материалдын өздөштүрүлүүсүн текшерүү (жазуу түрүндө суроо салуу).

Вариант 1.

1. Өсүүчү функцияга жана функциянын минимумуна аныктама бергиле.

2. $y = x^2 - 3|x|$ функциясынын өсүү жана кемүү аралыктарын, экстремум чекиттерин тапкыла, графиктин тургузула.

Вариант 2.

1. Кемүүчү функцияга жана функциянын максимумуна аныктама бергиле.

2. $y = 3|x| - x^2$ функциясынын өсүү жана кемүү аралыктарын, экстремум чекиттерин, экстремумдарын тапкыла, графиктин тургузула.

III. Жаңы материал менен таанышуу

Функциялардын графиктерин тургузуу.

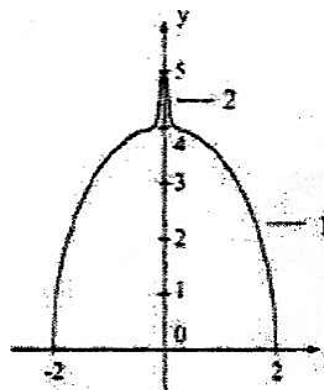
Кичирээк класстарда функциянын графиктин түзүүнүн жалгыз ыкмасы «чекиттер менен» түзүү болгон. Сызыктуу, квадраттык, даражалуу, тригонометриялык ж.б.у.с. функцияларды мыкты билген учурда мындай ыкма жакшы натыйжаларды берет. Ал эми тааныш эмес функциялар үчүн бул ыкманы колдонууда функциянын кээ бир принципалдуу өзгөчөлүктөрүн карап көрүүгө болот. Мисалы, физикада резонанстуу кубулуштар кенири таралган. Алардын манызы кандайдыр бир физикалык чондуктун жай өзгөрүшүндө капысынан анын чоңоюусу же кичирейүүсү келип чыгат.

Мисал 1.

Татаал физикалык кубулуштарга жана терминологияга кирбестен, айталык, у лазеринин нурдануу кубаттуулугунун x нурдануу жыштыгынан көз карандылыгынын болжолдуу структурасы:

$$y = \frac{5}{1 + x^2} + \frac{0,01}{0,01 + x^2} - 1. \text{ бул функциянын}$$

жакындаштырылган графиги сүрөттө көргөзүлгөн. Көрүнүп тургандай 1 ийри сызыгынын жай өзгөрүшүнүн фонунда (функцияда биринчи жана үчүнчү кошулуучулар менен сүрөттөлгөн) максимум 2 (функцияда экинчи кошулуучу менен сүрөттөлгөн) тардык пайда болот.



Эгерде графикти «чекиттер боюнча» түзсө, мисалы, 0,5 кадамы менен, анда максимум жөн гана калып калат. Ошону менен катар анын болуусу лазердеги абдан кызыктуу жана татаал физикалык кубулуштар жөнүндө күбөлөндүрөт. Бул максимумду колдонуу эң жогорку тактыктагы лазер сааттарын (жыштыктын стандарты), локалорлорду ж.б.у.с. жасоого мүмкүндүк берди. Мындай резонанстуу максимумдун маанилүүлүгү түшүнүктүү болсун үчүн, бир гана мисал келтирели. Ойлонуп табылган лазер сааттары үзгүлтүксүз иштөөсүндө 1млрд жылдын ичинде 1секундага гана жаңылат.

Ушундайча функциянын графиктин сапаттуу жана негиздүү түзүү үчүн алдын ала бул функцияны изилдөө кажет. Функцияны изилдөөдө жана графиктин түзүүдө кандай этаптарды өтүү керектигин мисалда көргөзөбүз.

Мисал 2.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \text{ функциясын изилдейбиз жана}$$

анын графиктин тургузабыз.

1. **Функциянын аныкталуу областын табабыз.** Бөлчөктүн бөлүмү $x^2 + 2$ нөлгө айланбайт, андыктан $D(f)$ - бүткүл сан огу.

2. **Функциянын өзгөчөлүктөрүн аныктайлы.** Бул функция жуп. Чындыгында,

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = y(x).$$

Ошондуктан функцияны $x \geq 0$ до изилдеп жана графиктин тургузабыз. Андан соң, алынган графиктин бөлүгүн ордината огуна карата чагылдырабыз.

3. **Функциянын графикинин координата октору менен кесилишүү чекиттерин табабыз.** Ордината огу менен кесилишүү чекитин табу үчүн $x = 0$ деп, $y = -1$ алабыз. Ордината огу менен кесилишүү чекити $(0; -1)$. Абсцисса огу менен кесилишүү чекитин табу үчүн $y = 0$ деп, алабыз, мындан $x = 1$. Абсцисса огу менен кесилишүү чекити $(1; 0)$.

4. **Функциянын белгилеринин турактуу болуу аралыктарын аныктайлы,** б.а. кайсы аралыктарда функция оң, кайсы аралыкта-терс маанини аларын функциянын терстик

аралыктарын табуу үчүн $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} < 0$ барабарсыз-

дыгын чыгарабыз. $x^2 - 1 < 0$, мындан $0 \leq x < 1$. Функциянын оң аралыгын табуу үчүн төмөнкү барабарсыздыкты чыгарабыз.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} > 0 \text{ же } x^2 - 1 > 0, \text{ мындан } x > 1.$$

5. **Функциянын монотондуулугун аныктайбыз.** $x_2 > x_1$ болгондой $x_2 - x_1 \in [0; \infty)$ аралыгынан эки чекити болсун, функцияны

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = \frac{(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

түрүндө жазып алабыз.

$$y(x_2) - y(x_1) = \left(1 - \frac{2}{x_2^2 + 1}\right) - \left(1 - \frac{2}{x_1^2 + 1}\right) = \frac{2}{x_1^2 + 1} - \frac{2}{x_2^2 + 1} = \frac{2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}.$$

Бул бөлчөктүн бөлүмү ар качан оң. Алымында: көбөйтүүчү $x_2 - x_1 > 0$ ($x_2 > x_1$ болгондуктан), $x_2 + 1 > 0$ ($x_2 > 0$ болгондуктан). Демек, $y(x_2) - y(x_1) > 0$ же $y(x_2) > y(x_1)$ болгондуктан бөлчөк оң. Ошондуктан $y(x)$ функциясы $[0; \infty)$ аралыгында өсөт. $y(x)$ функциянын жуптугун эске алсак, $(-\infty; 0]$ аралыгында кемийт.

6. **Функциянын экстремумдарын табабыз.** $x = 0$ чекитинде гана функциянын кемүүсү өсүүсү менен алмашкандыктан, минимум чекити $x_{\min} = 0$ жана функциянын минимума $y_{\min} = -1$ болот.

7. **Функцияны аргументтин чоң маанилеринде изилдейли.** Берилген функция

$$y = 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \text{ түрүнө ээ. } x \text{ тин чексиз өсүүсүндө}$$

$x^2 + 1$ бөлчөктүн бөлүмү да чексиз өсөт.

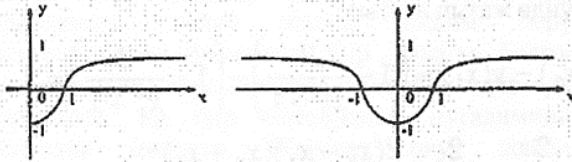
Ошондуктан $\frac{2}{x^2 + 1}$ бөлчөгүнүн маанилери

белгиси оң болуп калуу менен, нөлгө жакындайт. Демек, 1 ден кичине болуп калуу менен, $y(x)$ функциясынын мааниси 1 ге чексиз жакындайт. Ошондуктан, $y = 1$ түз сызыгы $y(x)$ функциясынын горизонталдык асимптотасы болот.

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}; \text{ функциясынын касиеттерин}$$

изилдөө анын графиктин тургузууга мүмкүндүк берет. Алгач, $x \in [0; \infty)$ аралыгы үчүн төмөндөгүдөй түзүү жүргүзүп көрөлү.

$(0;-1), (1;0)$ жана координата окторунун кесилишин тургузушат. $[0;1]$ аралыгында $y < 0, (1;\infty)$ аралыгында $y > 0$ болоорун эске алабыз. Функциянын маанилери аргументтин чоң маанилеринде $y = -1$ баштап өсүп, $y = 1$ маанисинде умтулат. Үзгүлтүксүз ийри сызыгын өткөрөбүз.



$y(x)$ функциясынын жуптугун эске алып $x \geq 0$ до тургузулган ийри сызыкты ордината огуна карата солго симметриялуу чагылдырабыз. Функциянын графигин алабыз.

Функцияларды изилдөө схемасы.

Көргөзүлгөн мисалдагы фактыларга негизделип, изилдөөнүн бардык этаптары иштелип чыккан. Алар:

1. $y(x)$ функциясынын аныкталуу жана маанилеринин областтарын табуу.

2. Функциясынын, анын изилдөөнү жеңилдете турган өзгөчөлүктөрү бар экендигин тактоо, б.а. а) жуп же так экендигин; б) мезгилдүүлүгүн.

3. Функциянын координата октору менен кесилишкен чекиттеринин координаталарын эсептөө.

4. Функциянын белгилеринин турактуу болуу аралыктарын табуу.

5. Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын аныктоо.

Функциянын экстремум чекиттерин, экстремумдун түрүн (максимум же минимум) табуу жана функциянын экстремумун эсептөө.

6. Функциянын өзгөрүү тартибин аныкталуу областына тиешелүү болбогон мүнөздүү чекиттердин (мисалы, $x = 0$ чекити $f(x) = \frac{1}{x}$

функциясы үчүн) аймагында жана аргументтин чоң (модулу боюнча) маанилеринде изилдөө.

Бул план болжолдуу мүнөздө экендигин айтуу зарыл. Ар бир пункт техникалык кыйынчылыктарды жаратышы мүмкүн. Мисалы, 1-пункта берилген $f(x)$ функциясынын аныкталуу жана маанилеринин областтарын табууда да. $f(x)$ - рационалдык функция дейли

б.а. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ ($h(x), g(x)$ - айрым көп

мүчөлөр) Анда, $f(x)$ функциясынын аныкталуу областы $g(x) \neq 0$ шарты менен берилет. Андыктан, $g(x)$ көп мүчөсүнүн тамырларын табуу зарыл. Маанилеринин областын табуу мындан да оорураак тапшырма. Ал үчүн функциясынын монотондуулук аралыктарын, анын экстремумдарын табуу, $f(x)$ функциясынын $|x|$ чоң маанилеринде изилдөө керек. Бул процедураларды функциянын пределинин теориясынын жардамы менен гана аткарууга болот.

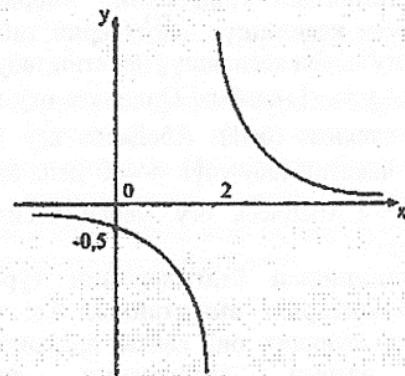
$f(x)$ функциясынын графигинин асимптотасы түшүнүгүнө токтололу. Асимптоталар эки түргө бөлүнүшөт: вертикалдык жана жантак (анын ичинде горизонталдык).

Асимптоталарга так аныктама функциянын пределинин теориясынын жардамы менен гана берилиши мүмкүн. Андыктан асимптота түшүнүгү менен гана чектелебиз.

Эгер x маанилеринин a чоңдугуна жакындашында $f(x)$ функциясынын маанилери чексиз өсүп же кемесе, б.а. $x \rightarrow af(x) \rightarrow \pm\infty$ болсо $x = a$ вертикалдык түз сызыгы $f(x)$ функциясынын вертикалдык асимптотасы деп аталат.

Мисал 3.

$y = \frac{1}{x-2}$ функциясын карап жана графигин тургузалы.



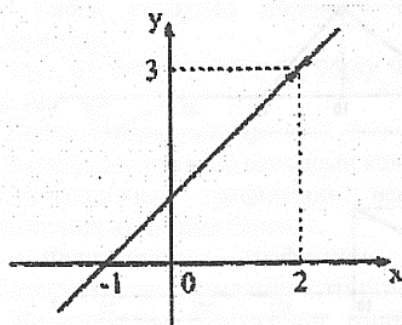
Берилген функциянын графиги $y = \frac{1}{x}$ функциянын графигинин абсцисса огун бойлото оңго карай $(0;2)$ векторуна көчүрүү менен алынат. $x \rightarrow 2$ (мында $x < 2$ болгондо $x - 2$

бөлүмү терс жана $x - 2 \rightarrow 0$ болоору көрүнүп турат.

Ошондуктан, $y = \frac{1}{x-2}$ функциянын маанилери чексиз кемийт, б.а. $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 2$ ($x > 2$ болгондо). $x - 2$ бөлүмү оң жана $x - 2 \rightarrow 0$. Андыктан, $y = \frac{1}{x-2}$ функциянын маанилери чексиз өсөт, б.а. $y \rightarrow \infty$. Демек, $x = 2$ вертикалдык түз сызыгы берилген функциянын вертикалдык асимптотасы болот.

Рационалдык функция болгон учурда, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айлангандагы x тин маанилери вертикалдык асимптота болоору мисалдан көрүнүп турат. Ошентсе да, баардык рационалдык функцияларда вертикалдык асимптота боло бербейт (бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланса да).

Мисал 4. $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ функциянын графигин тургузалы.

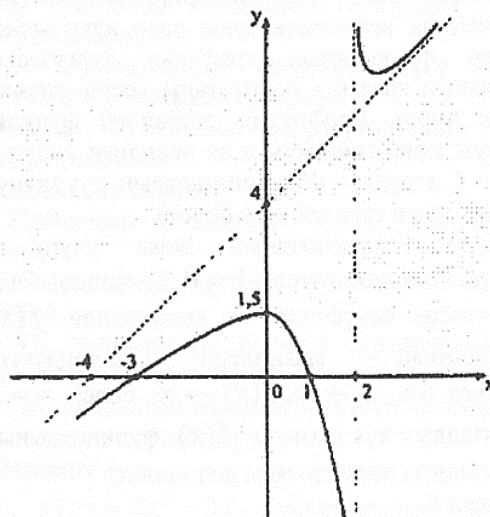


Берилген бөлчөктүн алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратып кыскартабыз:

$$y = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x+1 \quad (x \neq 2). \quad x \rightarrow 2$$

болгондо функциянын маанилери $y \rightarrow 3$ көрүнүп турат. Ошондуктан вертикалдык асимптотага ээ эмес. Функция аныкталбаган $x = 2$ мааниси гана жашайт.

Эми жантак асимптота түшүнүгүнө кайрылалы. Эгер, x маанисинин чексиз өсүү же кемүүсүндө $f(x)$ функциясынын маанилери $y(x)$ сызыктуу функциясынын маанисине, б.а. $x \rightarrow \pm\infty, f(x) \rightarrow y(x)$ болсо $y = kx + b$ түз сызыгы жантак асимптота деп аталат.



Функциянын графигинин координата октору менен кесилишүү чекиттерин табабыз. $x = 0$

болгондо $y = \frac{-3}{-2} = 1,5$ - ордината огу менен

кесилишүү чекити. $y = 0$ болгондо

$0 = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ теңдемесин чыгарабыз же

$0 = x^2 + 2x - 3$, тамырлары $x_1 = -3, x_2 = 1$ - абсцисса огу менен кесилишүү чекиттери $x = 2$ түз сызыгы вертикалдык асимптота экендиги көрүнүп турат. $x \rightarrow 2$ болгондо бөлчөктүн алымы $x^2 + 2x - 3 \rightarrow 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$. $x < 2$ болгондо, бөлчөктүн бөлүмү терс жана $x - 2 \rightarrow 0$.

Ошондуктан функциянын маанилери $y \rightarrow \infty$. $x > 2$ болгондо $(x - 2)$ бөлчөктүн бөлүмү оң жана $x - 2 \rightarrow 0$. Андыктан, функциянын маанилери $y \rightarrow \infty$.

Бөлчөктүн $x^2 + 2x - 3$ алымын $x - 2$ бөлүмүнө бөлүп, бүтүн бөлүгүн бөлүп алабыз.

Анда $y(x)$ функциясы $y = x + 4 + \frac{5}{x-2}$ түрүнө

ээ. $x \rightarrow \infty$ болгондо $\frac{5}{x-2} \rightarrow 0$ жана $y(x)$

функциясынын маанилери $y = x + 4$ сызыктуу функциянын маанилерине умтулаары көрүнүп турат. Ошондуктан $y = x + 4$ сызыктуу функциясы берилген $y(x)$ функциясынын жантак асимптотасы болот.

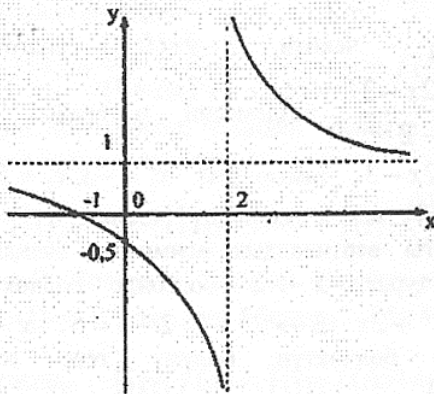
Функциянын графигинин координата октору менен кесилишүүчү чекиттерин, вертикалдык жана жантак асимптоталарды эске алуу менен берилген функциянын графигин тургузабыз. Функциянын графиги асимптотаны кесип өтпөөсү көрүнүп турат. Графигтин эскизинен функция максимум жана минимумга ээ экендиги көрүнүп турат (алардын координаталарын туундунун жардамы менен гана табууга болот).

Жантак асимптотанын жеке учуру – горизонталдык асимптота ($k = 0$ болгондо). Эгер x тин чексиз өсүүсүндө же кемүүсүндө $f(x)$ функциясынын маанилери b чоңдугуна умтулушса б.а. $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty$ болсо $y = b$ горизонталдык түз сызыгы $f(x)$ функциясынын горизонталдык асимптотасы деп аталат.

Мисал 6

$$y = \frac{x+1}{x-2} \quad \text{Функциясынын графигин}$$

тургузалы.



Функциянын графигинин координата октору менен кесилишүү чекиттерин табабыз. $x = 0$ болгондо, $y = -0,5$ – ордината огу менен кесилишүү чекити. $y = 0$ болгондо, $0 = \frac{x+1}{x-2}$ теңдемесин алабыз. $0 = x+1$, мындан тамыры $x = -1$ – абсцисса огу менен кесилишүү чекити.

$x = 2$ түз сызыгы – вертикалдык асимптота. $x \rightarrow 2$ учурунда бөлчөктүн алымы $x+1 \rightarrow 3$. $x < 2$ болгондо бөлчөктүн бөлүмү $x-2$ терс жана $x-2 \rightarrow 0$. Ошондуктан, функциянын мааниси $y \rightarrow \infty$.

Бөлчөктүн $x+1$ алымын анын бөлүмү $x-2$ ге бөлөбүз. Анда, $y(x)$ функциясы $y = 1 + \frac{3}{x-2}$ түрүнө ээ.

$$x \rightarrow \infty \text{ да бөлчөк } \frac{3}{x-2} \rightarrow 0 \text{ жана } y(x)$$

функциясынын маанилери 1ге умтулат. Андыктан

$$y = 1 \text{ түз сызыгы берилген } y = \frac{x+1}{x-2}$$

функциясынын графигинин горизонталдык асимптотасы деп аталат.

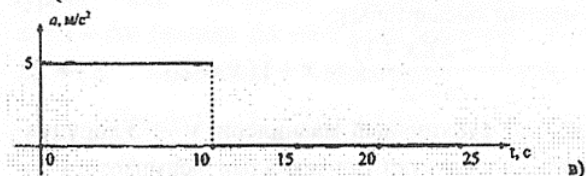
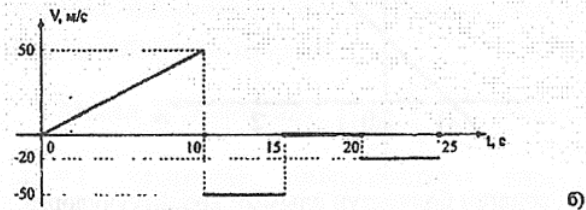
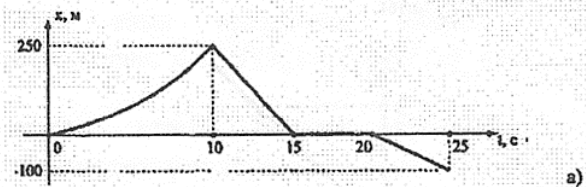
Жогорудагы изилдөөнү эске алып, анын графигин тургузабыз. Бул график $y = \frac{3}{x}$ функциясынын графигин 2 бирдикке оңго жана 1 бирдикке жогору көчүрүлүүсү болот.

Функциянын графигин «окуу».

Дээрлик бардык изилдөөлөрдө натыйжалар график түрүндө көрсөтүлөт. Андыктан аны «окуй» билүү керек, б.а. түшүнүп жана аларга тиешелүү функциялардын касиеттерин элестете билүү керек.

Мисал 7

а) сүрөтүндө А пунктунан В пунктуна карай жүргөн чекити үчүн $x(t)$ көз карандылыгы көрсөтүлгөн.



Кыймылды, кошумча графиктер менен иллюстрациялап, сүрөттөйбүз: б) – ылдамдыктын убакыттан көз карандылыгы менен $V(t)$ жана в) – ылдамдануунун $a(t)$ убакытынан көз карандылыгы менен. Мында x координатасы (жайгашуу) м менен, ылдамдык V – м/с, a ылдамдануусу – м/с², t убакыты – с менен ченелишет.

0–10с аралыгында x жайгашуусу квадраттык закону менен өзгөрөт, б.а. кыймыл тең

ылдамдануучу болот. Ошондуктан V ылдамдамдыгы сызыктуу закон менен өзгөрөт жана a ылдамдануусу турактуу. Мында чекит А дан В га карай жүрөт, себеби x оң мааниге ээ.

$t = 10c$ болгон кезде чекит кыймылын карама-каршы жакка өзгөртөт жана А' пунтун карай жүрөт. Мында x координатасы сызыктуу закон менен өзгөрөт, б.а. кыймыл $V = -50m/c$ ылдамдыгы менен текши, бир калыпта жүрөт.

$t = 10 - 15c$ болгон учурдагы ылдамдыктын терс мааниси кыймылдын А пунктуна карай багытын көрсөтөт. Ылдамдануу $a = 0$.

$t = 15 - 20c$ убактысынын өтүшү менен x координатасы өзгөрбөйт жана $x = 0$. Бул чекит А пунктунда тынч абалда экендигин билдирет. Албетте, ылдамдык $V = 0$, ылдамдануу да $a = 0$.

$t = 20 - 25c$ аралыгында x координатасы сызыктуу закон боюнча өзгөрөт, б.а. кыймыл $V = -20m/c$ ылдамдыгы менен текши, бир калыпта болот. x координатасы жана V ылдамдамдыгынын терс белгиси чекиттин А жана В-пунктунан четөөсүн көргөзөт. Ылдамдануу, албетте, $a = 0$.

IV. Сабак учурунда иштөөгө берилүүчү тапшырмалар.

№ 93(а, б); 94(а, г); 95(а, б); 96(а); 97(в); 98(а, г); 99(а, б).

V. Кайталоого суроолор.

1. Функцияны изилдөө схемасын келтиргиле.
2. Функциянын графигинин вертикалдык асимптотасына аныктама бергиле.
3. Функциянын графигинин жантак асимптотасынын аныктамасын келтиргиле.
4. Функциянын графигинин горизонталдык асимптотасынын аныктамасын келтиргиле.

VI. Үй тапшырма.

№ 93 (в, г); 94(б, в); 95(в, г); 96(в); 97(а); 98(б, в); 99(в, г).

VII. Чыгармачылык менен иштөөгө берилген тапшырмалар.

Функцияларга изилдөө жүргүзүп жана графигин тургузула.

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{x-2}{x+1}; & 2) y &= \frac{x+1}{x^2+3x+2}; \\ 3) y &= \frac{x+1}{x^2-4}; & 4) y &= \frac{1-x}{x^2-9}; \\ 5) y &= \frac{x-2}{x^2+2x+3}; & 6) y &= \frac{x^2+3x+2}{x+1}; \end{aligned}$$

VIII. Сабакты жыйынтыктоо.

№2 теманын аталышы: Туунду жана анын колдонулушу.

1.1. Функциянын үзгүлтүксүздүгү жана пределге өтүү жөнүндө түшүнүк.

Максат: Функциянын үзгүлтүксүздүгүн жана пределин талкуулоо.

Сабактын жүрүшү.

I. Сабактын темасын жана максатын баяндоо.

II. Өтүлгөн материалды кайталоо жана бекемдөө.

1. Үй тапшырмасы боюнча суроолорго жооп берүү (чыгарылбаган эсептерди талдоо).

2. Материалдын өздөштүрүлүүсүн текшерүү (жазуу түрүндө суроо салуу).

Вариант 1.

1. $f(x) = 4x^2 - 5x$ функциясынын $x_0 = 3$ чекитиндеги туундусун тапкыла.

2. $f(x) = \frac{3}{x}$ функциясынын графигине $x_0 = -1$ чекитинде өткөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

3. $x(t) = 2t^3 + 5$ закону менен $t_0 = 4$ моментинде түз кыймылдагы чекиттин көз ирмемдеги ылдамдыгын аныктагыла.

Вариант 2.

1. $f(x) = 3x^2 + 4x$ функциясынын $x_0 = 2$ чекитиндеги туундусун тапкыла.

2. $f(x) = -\frac{2}{x}$ функциясынын графигине $x_0 = 1$ чекитинде өткөрүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

3. $x(t) = -4t^3 + 3$ закону менен $t_0 = 3$ моментинде түз кыймылдагы чекиттин көз ирмемдеги ылдамдыгын аныктагыла.

III. Жаңы материал менен таанышуу

$$V_{opt}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = V_0 + at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \text{ функциясы}$$

$\Delta t = 0$ до аныкталбайт. Бирок $L = V_0 + at_0$ саны үчүн $|\Delta t|$ нын кичирейүүсү менен $V_{opt}(\Delta t) - L \rightarrow 0$ айырмасы нөлгө жакындайт. Бул факты башкача формулировкаласа да болот: $V_{opt}(\Delta t) \Delta t \rightarrow 0$ учурунда L санына барабар

жана $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{opt}(\Delta t) = L$. Бул учурда жогорку

математикада эң маанилүү функциянын предели түшүнүгү келип чыгат.

Эгер $f(x) - L$ айырмасы чексиз кичине болсо (б.а. ал айырма $|f(x) - L| < h$, мында h -каалагандай бекитилген (фиксирленген) оң сан), анда $x \rightarrow x_0$ да $f(x)$ функциясы L пределине ээ (же L санына умтулат). Бул учурда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде аныкталбай да калышы мүмкүн. $x \rightarrow x_0$ ордуна $\Delta x \rightarrow 0$ деп да жазууга болот. $f(x)$ функциясы үчүн L санын жана x_0 чекитин табуну пределге өтүү деп аташат, б.а. $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. «Предел» сөзү «чек» дегенди түшүндүрөт.

Мисал 1 $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ болсо, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

табалы. $\Delta x \rightarrow 0$ эске алып, $x = 1 + \Delta x$ (мында $\Delta x \rightarrow 0$) деп эсптейли. Анда $x_0 = 1$ чекитинин аймагында функция

$$f(x) = \frac{(1 + \Delta x) - 2}{(1 + \Delta x) + 1} = \frac{\Delta x - 1}{\Delta x + 2} = f(\Delta x)$$

түрүнө ээ, себеби, мындай аймакта функция Δx тен гана көз каранды.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 1}{\Delta x + 2}.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ болгондо мындай бөлчөктүн алымы $(\Delta x - 1) \rightarrow -1$, ал эми бөлүмү $(\Delta x + 2) \rightarrow 2$.

$$\text{Андыктан, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = -\frac{1}{2} = L.$$

Пределдин аныктамасын пайдаланып, чындыгында ушундай болоорун далилдейбиз.

$$|f(x) - L| = \left| \frac{\Delta x - 1}{\Delta x + 2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{3\Delta x}{2(\Delta x + 2)} \right| \approx \frac{3|\Delta x|}{4}.$$

Бизди түздөн түз функциясынын $x_0 = 1$ чекитинин аймагындагы абалы кызыктыргандыктан $\Delta x < 1$, $\Delta x + 2 \approx 2$ деп эсптейбиз. Мындай айырма, каалагандай алдын ала берилген h санынан кичине болушу керек. Андыктан,

$$\frac{3|\Delta x|}{4} < h \text{ барабарсыздыгын чыгарабыз, мындан}$$

$$|\Delta x| < \frac{4h}{3}.$$

Айрым баалоолорду жүргүзөбүз. а) Эгер $h = 0,1$ болсо (б.а. функциянын мааниси $L - h < f(x) < L + h$ же $-0,6 < f(x) < -0,4$ лыгында болсо), анда $|\Delta x| < \frac{4h}{3} = 0,13$ (б.а.

аргументтин маанилери $x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x$ же $0,87 < x < 1,13$ диапазонунда болуулары керек).

б) Эгер $h = 0,01$ болсо (б. а. функциянын маанилери $-0,51 < f(x) < -0,49$ аралгында жатышса), анда $|\Delta x| < 0,013$ (б. а. аргументтин маанилери $0,987 < x < 1,013$ интервалында болуулары керек). Ошентип, канчалык $f(x)$ функциясынын маанилери, x_0 чекитиндеги анын пределинин маанисинен айырмаланып турса, ошончолук x аргументинин маанилери x_0 чекитине жакын жайгашуулары керек.

Бул мисалда $f(x)$ функциясы x_0 чекитине аныкталгандыгын жана бул чекитте функциянын жана анын пределинин маанилери дал келишээрин, б.а. $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ экендигин

эскерте кетели. Мындай функциялар x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүз деп аталат. Функциянын предели, функциянын өзү x_0 чекитине аныкталбаса да табылышы мүмкүн.

Мисал 2. Эсептегиле: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Функция

$x_0 = 1$ чекитинде аныкталбастыгы көрүнүп турган иш. Мурунку мисалдагыдай эле, $x = 1 + \Delta x$ (мында $\Delta x \rightarrow 0$) деп эсптейбиз. Анда $x_0 = 1$ чекитинин аймагында функция

$$f(x) = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{(1 + \Delta x) - 1} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x = f(\Delta x)$$

түрүнө ээ, себеби, мындай аймакта функция Δx тен гана көз каранды.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(2 + \Delta x) = 2.$$

Мурунку мисалга салыштырмалуу $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

экендигин далилдөө оңой. Ошондой эле аныктаманы колдонуп, функция берилген чекитте пределге ээ болбостугун далилдөөгө болот.

Мисал 3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ те $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

жашабагынын далилдейли. $x = 1 + \Delta x$ (мында $\Delta x \rightarrow 0$) деп эсептейбиз. Функцияны

$$f(x) = \frac{1}{(1 + \Delta x) - 1} = \frac{1}{\Delta x} = f(\Delta x) \quad \text{түүрүндө}$$

алабыз, себеби, функция Δx тен гана көз каранды. $\Delta x \rightarrow 0$ болгондо бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн аз айырмалуу экендиги көрүнүп турат. Ушул эле учурда бөлчөктүн өзү же абдан чоң, же абдан кичине болот (Δx белгисине карай), б.а. $f(x) = f(\Delta x) \rightarrow \pm\infty$.

Далилдөөнү карама – каршыдан жүргүзөбүз. Мындай предел жашайт жана L ге барабар дейли.

$$|f(x) - L| = \left| \frac{1}{\Delta x} - L \right| \quad \text{айырмасын табабыз.}$$

$$\left| \frac{1}{\Delta x} - L \right| < h, \quad \text{же} \quad -h < \frac{1}{\Delta x} - L < h, \quad \text{же}$$

$$L - h < \frac{1}{\Delta x} < L + h. \quad h \neq L \quad \text{деп эсептейбиз. Эки}$$

сызыктуу барабарсыздыкты чыгаруу менен $\frac{1}{L-h} > \Delta x > \frac{1}{L+h}$ алабыз. Бирок бул натыйжа

$\Delta x \rightarrow 0$ шартына карама-каршы келет. Дагы бир жолу функциянын үзгүлтүксүздүгүнө кайрылабыз. Эгер $x \rightarrow x_0$ учурунда $f(x) \rightarrow f(x_0)$ б.а.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ болсо, $f(x)$ функциясынын

x_0 чекитинде үзгүлтүксүз дейбиз. Мында $f(x) - L = f(x) - f(x_0) = \Delta f$. Андыктан

үзгүлтүксүз функцияга башка аныктама берүүгө болот. Эгер $|\Delta f|$ $|\Delta x|$ тин кичине маанилеринде кичине болсо, б.а. эгер $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ болсо, $f(x)$

функциясынын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз. Ошентип, x_0 чекитиндеги функциянын үзгүлтүксүзү үчүн, x_0 чекитиндеги аргументтин кичине өзгөрүүсүнө функциянын маанилеринин кичине өзгөрүүсү дал келет.

Бардык белгилүү элементардык функциялар өзүнүн аныкталуу областындагы ар бир чекитинде үзгүлтүксүз. Мындай функциялардын графиктери үзгүлтүксүз ийри сызыктар менен сүрөттөлүшөт. Функциянын графигин «чекиттер менен» түзүү функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн касиетине

негизделген. Ошентсе да берилген функция чындыгында үзгүлтүксүз экендигине ынануу керек. Жөнөкөй учурларда мындай изилдөө аныктаманын негизинде жүргүзүлөт.

Мисал 4. $f(x) = \cos x$ функциясы үзгүлтүксүз экендигин далилдейли.

$$\begin{aligned} \text{Функциянын өсүндүсүн табабыз} \\ \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 = \\ = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

Эсептейбиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = -2 \cdot 0 \cdot \sin x_0 = 0.$$

Демек, аныктама боюнча, $f(x)$ функциясы ар бир чекитинде үзгүлтүксүз.

Пределге өтүү функцияны изилдөөнүн жаңы ыкмасын берет. Бул ыкма математикалык анализде кеңири колдонулат. Математикалык анализ курсунда далиленүүчү пределге өтүү эрежелерин елгилей кетели.

Эреже 1. Эгер $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $\Delta x \rightarrow 0$ болгондо $\Delta f \rightarrow 0$, б.а. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.

Эреже 2. Эгер $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде туундуга ээ болсо, анда $\Delta x \rightarrow 0$ болгондо $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$, б.а. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Эреже 3. $x \rightarrow x_0$ болгондо, $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$ болсун дейли (б.а. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$). Анда $x \rightarrow x_0$ болгондо (б.а. $\Delta x \rightarrow 0$):

$$\text{а) } f(x) + g(x) \rightarrow A + B, \text{ б.а.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B;$$

$$\text{б) } f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B, \text{ б.а.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\text{в) } \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}, \quad \text{б.а.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$$

($B \neq 0$).

$f(x)$ жана $g(x)$ функциялары үчүн, $A = f(x_0)$ жана $B = g(x_0)$.

Пределге өтүү эрежелери функциянын үзгүлтүксүздүгүн далилдөөдө жана туундуну эсептөөдө кеңири колдонулат.

Мисал 5.

$f(x) = 10x^3 + 2\sqrt{x} + 3 \sin 2x$ функциясы $(0; \infty)$ аралыгынын каалагандай x_0 чекитинде үзгүлтүксүз экендигин далилдейли. $f(x)$ функциясы, каалагандай чекитте үзгүлтүксүз болушкан $y_1 = 10x^3$, $y_2 = 3 \sin 2x$

функцияларынын жана $(0; \infty)$ аралыгынын каалагандай x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгон $y_3 = 2 - \sqrt{x}$ функциясынын суммасынан турат.

Демек, 3а) касиети боюнча функциясы $(0; \infty)$ аралыгынын каалагандай чекитинде үзгүлтүксүз.

IV. Сабак учурунда иштөөгө тапшырмалар.

№197 (а,в); 198 (а,г); 199 (а,г); 200 (а,в); 201 (б,в); 202 (а,б); 203 (а,г); 204; 207 (а,в).

V. Кайталоо үчүн суроолор.

1. $x \rightarrow x_0$ учурундагы функциянын пределине айыктама бергиле.
2. Кандай функция x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат?
3. Пределге өтүүнүн эрежелерин санагыла.

VI. Үй тапшырма

№ 197(б, г); 198(а); 199 (б,в); 200 (б,г); 201 (а,г); 202(в,г); 203(б,в); 206; 207(б,г). .

VII. Сабакты жыйынтыктоо.

Адабияттар:

1. Саламатов Ж. Алгебра жана анализдин башталышы: 10-класс. Бишкек, 2003
2. Саламатов Ж. Алгебра жана анализдин башталышы: 11-класс. Бишкек, 2003