

Кожошов Т.Т.

**ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН КРУЧЕНИЯ,
ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ**

Kozhoshov T. T.

**CHARACTERISTICS OF CYLINDRICAL TORSION SPRING MADE OF THE
MATERIAL WITH FORM MEMORY**

УДК: 621. 014.2. 539. 371.

В данной работе произведён расчёт цилиндрических пружин кручения, при её деформировании в упругой стадии, изготовленных из материала, обладающего эффектом памяти формы в нелинейной постановке. Приводится анализ напряженно-деформированного состояния и определяется тот предельный момент, после которой появляются неупругие деформации.

In the given work calculation of cylindrical springs of torsion, at its deformation in the elastic statement, made of a material possessing effect of memory of the form in nonlinear statement. The analysis of the strained -deformed condition and defined that limiting moment after which appear non elastic deformations.

Как правило пружины, изготовленные из традиционных материалов, работают в упругой области деформирования. С появлением материалов, обладающих эффектом памяти формы, пружины, изготовленные на их основе, могут работать и за пределом упругих деформаций [1,2,7,8]. Причем, для использования эффектов обратимой памяти, генерации реактивных усилий, и т.п. наличие неупругих деформаций является обязательным условием. Обзор технических решений при применении материалов с памятью формы приведен в работе [3]. В данной работе теоретически исследуются рабочие характеристики цилиндрических пружин кручения, при её деформировании в упругой области изготовленных из материала обладающего эффектом памяти формы и задача решается в нелинейной постановке. Проводится анализ напряженно-деформированного состояния и определяется предельная нагрузка, после которой появляются неупругие деформации. Определение рабочих характеристик включает установление соотношений между изменениями диаметра, угла подъема, а также перемещений конца пружины (угловых и линейных) в зависимости от крутящего момента m .

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину, изготовленную из проволоки диаметром d , обладающей эффектом памяти формы. Пусть она воспринимает продольно-растягивающую нагрузку P и крутящий момент m . Известно, что геометрия цилиндрической винтовой пружины определяется тремя основными независимыми параметрами: D -диаметр пружины, a - угол подъема оси винтового бруса, l - длина оси рабочей части винтового бруса.

Рассмотрим геометрическую сторону данной задачи. Выразим необходимые геометрические характеристики пружины через основные независимые параметры. Известно [4,5], что они определяются следующими формулами: шаг оси винтового бруса

$$h = \nu D t g \alpha , \tag{1}$$

число рабочих витков

$$i = \frac{l \cos a}{p D} \tag{2}$$

Длина рабочей части пружины, т.е. её высота

$$H = h i, \text{ или } H = l \sin \alpha. \tag{3}$$

Введем полярный угол φ , отсчитываемый от некоторой оси перпендикулярной оси винтового бруса. Тогда его максимальное значение будет

$$\varphi_1 = \psi = 2\pi i .$$

Или с учетом формулы (2)

$$y = \frac{2l}{D} \cos a \tag{4}$$

Кривизна винтовой линии определяется формулой

$$c = \frac{2 \cos a}{D} \tag{5}$$

Кручение винтовой линии определяется формулой

$$w = \frac{2 \sin a}{D} \quad (6)$$

Из этих формул видно, что при растяжении и кручении пружины, её высота H и угол подъема a изменяются, а торцы пружины получают взаимные угловые и линейные перемещения. Рассмотрим внутренние усилия в пружине, нагруженной растягивающей осевой силой P и крутящим моментом m (рис. 1 а.).

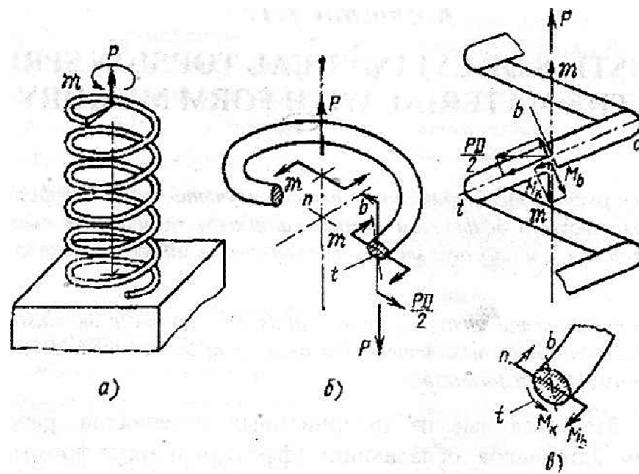


Рис. 1.

Равновесие пружины отсеченной плоскостью, нормальной к винтовой линии, даёт, что момент внутренних сил в осевой плоскости будет $PD/2$, момент в плоскости перпендикулярной к оси - равен m . (рис. 1б). Из рисунка (рис. 1е) видно, что крутящий и изгибающий моменты в поперечном сечении витка будут равны:

$$\dot{I} \dot{\epsilon} \delta = \frac{PD}{2} \cos a + m \sin a \quad (7)$$

$$\dot{I} \dot{\epsilon} \zeta = \cos a - \frac{PD}{2} \sin a \quad (8)$$

Рассмотрим перемещение пружины. Очевидно, что осадка пружины λ равна изменению высоты ΔH , а угол поворота θ одного торца относительно другого равен изменению центрального угла $\Delta \psi$.

Изменение кручения и кривизны витка пружины в упругой стадии её работы определяются законом Гука, т.е.

$$Dw = \frac{\dot{I} \dot{\epsilon} \delta}{C}, \quad Dc = \frac{M \dot{\epsilon} \zeta}{A} \quad (9)$$

где $C = GJ_{кр}$, $B = EJ_{из}$ - жесткости проволоки на кручение и изгиб, $J_{кр} - J_p$ - полярный момент инерции, $J_{из} = J_h$ - осевой момент инерции сечения относительно бинормали \bar{b} .

Рассмотрим нелинейный случай. В этом случае уравнения равновесия составляются для деформированного состояния пружины.

Перемещения определяются на основании (3) и (4) следующими формулами:

$$l = H - H_0 = l(\sin a - \sin a_0), \quad (10)$$

$$q = y - y_0 = 2l \frac{\cos a}{D} - \frac{\cos a_0}{D_0} \quad (11)$$

На основании формул (5) и (6) изменения кривизны и кручения равны

$$Dc = c - c_0 = \frac{2 \cos^2 a}{D} - \frac{2 \cos^2 a_0}{D_0}, \quad (12)$$

$$Dw = w - w_0 = \frac{\sin 2a}{D} - \frac{\sin 2a_0}{D_0}. \quad (13)$$

Учитывая формулу (9) и подставляя значения $M_{нз}$ и $M_{кр}$ по формулам (7) и (8) имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2B \left(\frac{\cos^2 \alpha}{D} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{D_0} \right) &= -\frac{PD}{2} \sin \alpha + m \cos \alpha \\ C \left(\frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0} \right) &= \frac{PD}{2} \cos \alpha + m \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Решая последнее уравнение относительно α и D , и подставляя их значения в формулы (10) и (11) можно найти угловые и линейные перемещения пружины в общем случае [4,5,6].

Рассмотрим пружину кручения, на торце которого приложен только крутящий момент (случай когда $P = 0$). В этом случае имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} 2B \left(\frac{\cos^2 \alpha}{D} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{D_0} \right) &= m \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C \left(\frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0} \right) &= m \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Из (15) и (16), исключив m найдем связь между α и D

$$D = D_0 \frac{(B-C) \sin 2\alpha}{(2B \tan \alpha \cos^2 \alpha_0 - C \sin 2\alpha_0)} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15), получаем следующую связь $m(\alpha)$

$$m = \frac{2C}{D_0 \cdot \cos \alpha} \frac{\left(\cos^2 \alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha} \cdot \cos^2 \alpha \right)}{\left(1 - \frac{C}{B} \right)} \quad (18)$$

Учитывая формулу (3) можно получить зависимость m от λ . Для этого представим выражение

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{l} + \sin \alpha_0.$$

Тогда: $\sin^2 \alpha = \left(\frac{\lambda}{l} + \sin \alpha_0 \right)^2 = \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 + 2 \frac{\lambda}{l} \sin \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0,$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 - 2 \frac{\lambda}{l} \sin \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0.$$

Обозначим $\frac{\lambda}{l} = \xi$. Величину ξ можно трактовать как безразмерное перемещение конца пружины при её

кручении. Тогда $\cos \alpha = \sqrt{A}$, где $A = 1 - \xi^2 - 2\xi \sin \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0$.

При этом

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2(\xi + \sin \alpha_0) \cdot \sqrt{A}.$$

Подставляя в (18) $\cos \alpha$ и $\sin 2\alpha$ окончательно получаем

$$m = \frac{BC}{D_0(B-C)} \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha_0 (\xi + \sin \alpha_0) - \sin 2\alpha_0 \cdot \sqrt{A}}{(\xi + \sin \alpha_0) \cdot \sqrt{A}} \quad (19)$$

Переходим к нахождению изгибающего момента, соответствующего началу фазовой деформации.

Если учитывать только один силовой фактор, действующий в поперечном сечении прутка - изгибающий момент, то максимальное нормальное напряжение определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{из}}}{W_{\text{из}}},$$

где $W_{\text{из}}$ - момент сопротивления изгибу. Для прутка диаметром d

$$W_{\text{из}} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (20)$$

Пусть при некоторой нагрузке m максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении прутка достигнут величины предела фазовой текучести материала $\sigma_{\text{фТ}}$, значение изгибающего момента соответствующее этому случаю обозначим $M_{\text{фТ}}$.

Определим значение параметра $\alpha = \alpha_{\text{фТ}}$, при котором заканчивается чисто упругая работа пружины. Для этого приравняем величину изгибающего момента $M_{\text{из}} = M_{\text{фТ}}$. С учетом (8) (при $P=0$), (9) и (12), получим:

$$\frac{2C}{D_0} \frac{\left(\cos^2 \alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0 \cdot \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \right)}{\left(1 - \frac{C}{B} \right)} = \sigma_{\text{фТ}} W_{\text{из}}, \quad (21)$$

или

$$m_{\text{фТ}} \cdot \frac{\cos \alpha}{W_{\text{из}}} - \sigma_{\text{фТ}} = 0.$$

Корень уравнения (21) $\alpha = \alpha_{\text{фТ}}$ определяет граничное значение угла подъема пружины, после которого начинают появляться неупругие деформации.

Таким образом, окончательно получили:

$$m_{\text{фТ}} = \frac{2C}{D_0 \cdot \cos \alpha_{\text{фТ}}} \frac{\left(\cos^2 \alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0 \cdot \cos^2 \alpha_{\text{фТ}}}{\sin 2\alpha_{\text{фТ}}} \right)}{\left(1 - \frac{C}{B} \right)}. \quad (22)$$

Для получения графических характеристик пружины нами произведен расчет цилиндрической пружины, изготовленной из никелида титана, имеющего следующие параметры:

модуль продольной упругости $E=8,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,

модуль сдвига $G=1,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,

коэффициент Пуассона $\mu=0,35$,

диаметр пружины $D_0=20 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

диаметр прутка $d_0=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

количество витков $i_0=10$.

На всех полученных диаграммах кривые: 1, 2, 3 и 4 получены при начальных углах подъема соответственно $\alpha_0=2,73; 3,19; 3,64$ и $5,45^\circ$.

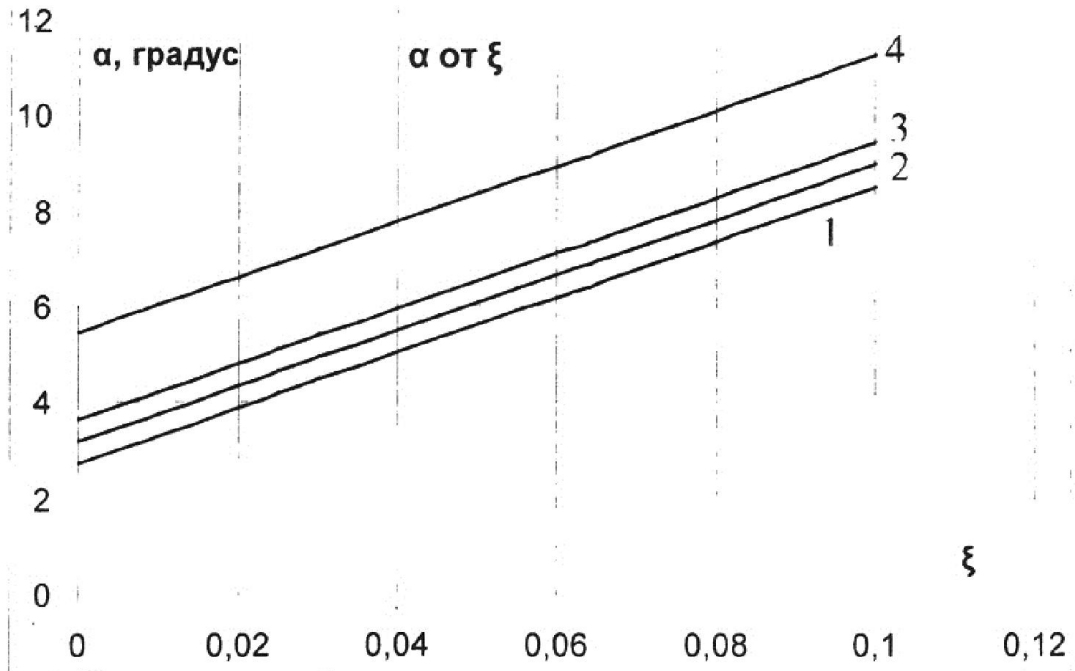


Рис. 3

На рис. 3 даны кривые зависимости изменения угла подъема α от безразмерной величины ξ при различных начальных углах α_0 .

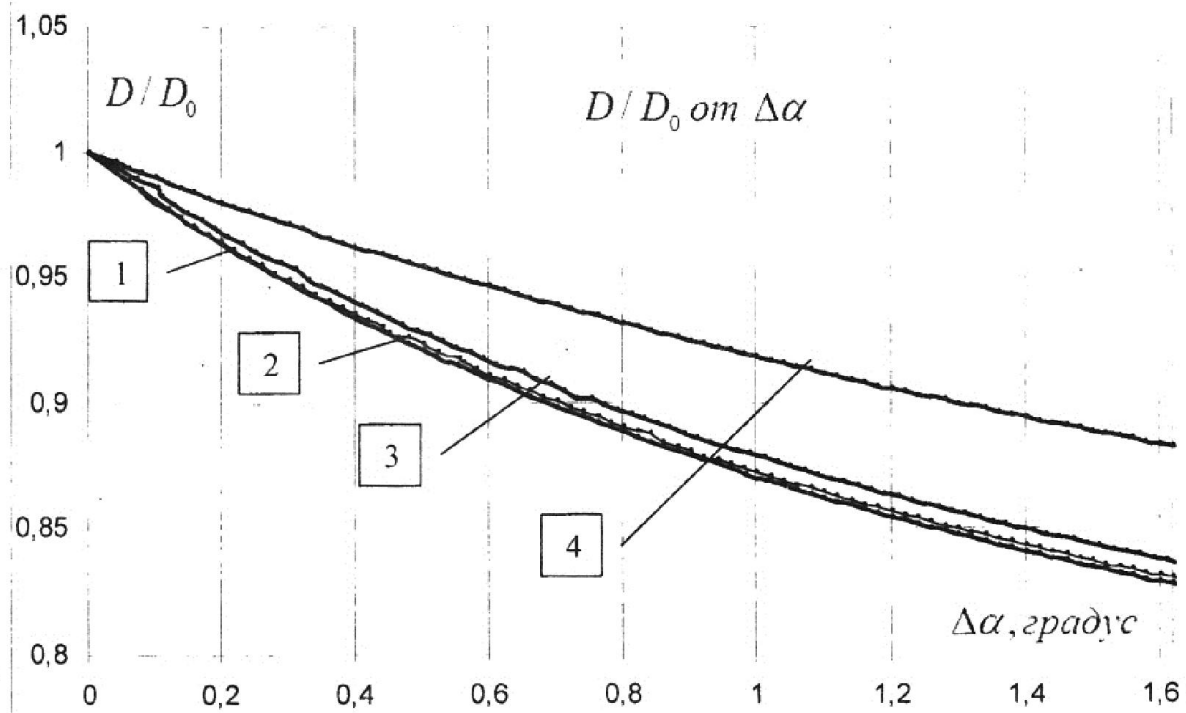


Рис. 4

На рис. 4 приведены зависимости D/D_0 от угла подъема $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, для различных α_0 .

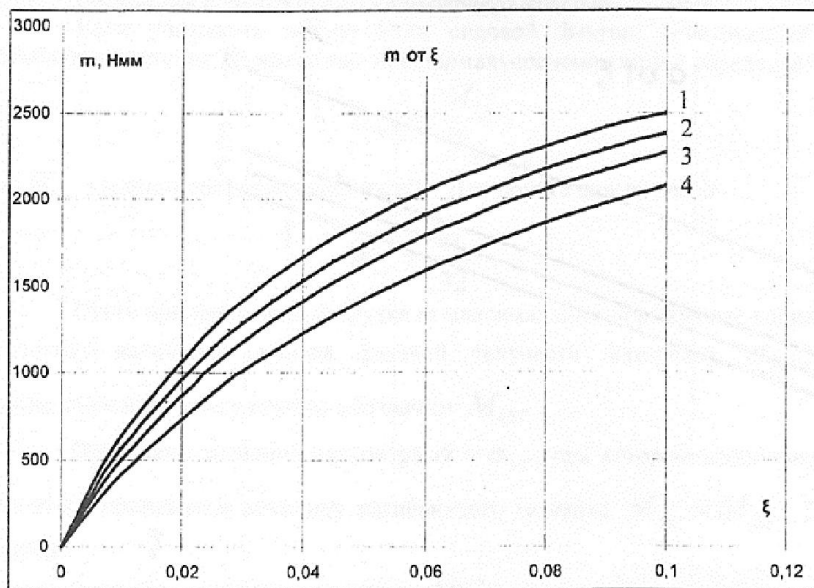


Рис. 5

На рис. 5 приведены зависимости крутящего момента m от ξ при различных начальных углах α_0 .

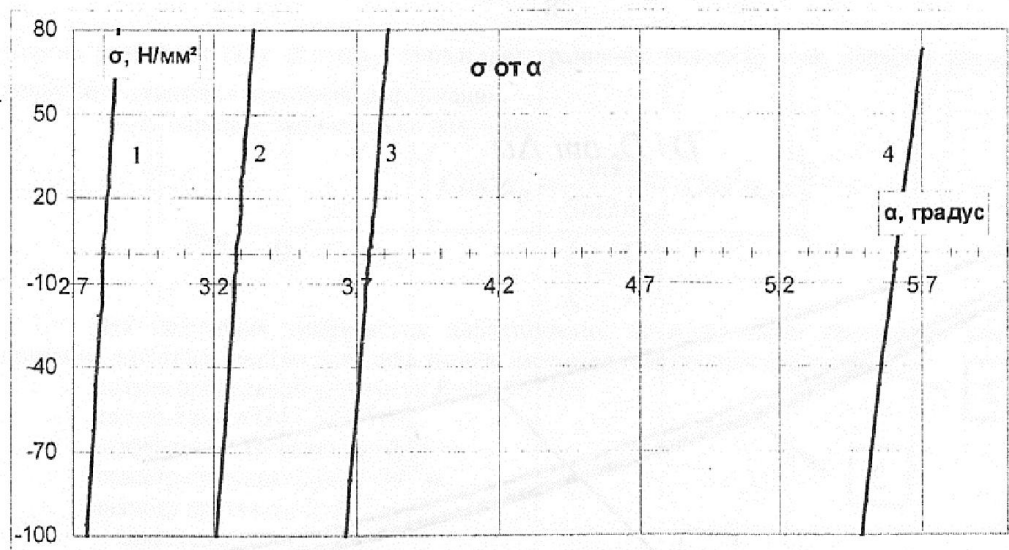


Рис.6

На рис. 6 показано графическое решение уравнения (21). Корнями уравнения (21) оказались соответственно, следующие величины: $\alpha_{\phi T1} = 2,8^\circ$, $\alpha_{\phi T2} = 3,2^\circ$, $\alpha_{\phi T3} = 3,7^\circ$, $\alpha_{\phi T4} = 5,6^\circ$.

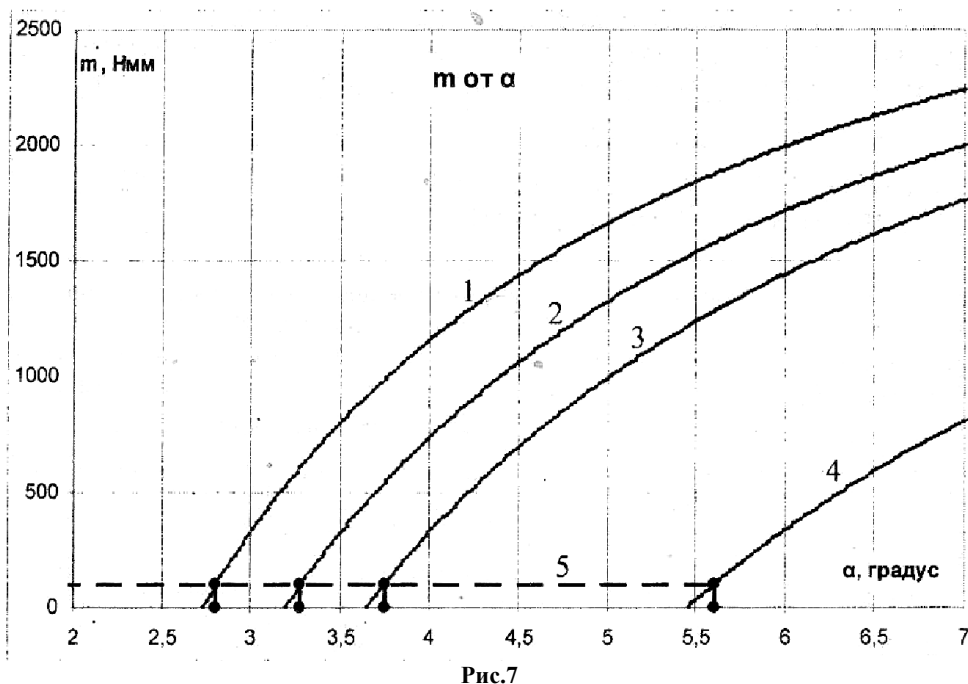


Рис.7

На рис. 7 приведены кривые t от угла α при различных начальных углах подъема, кривая 5 соответствует предельным крутящим моментам.

Из графиков видно, что кривые зависимости изменения угла подъема α от безразмерной величины перемещения конца пружины при кручении ξ изменяется линейно при любых α_0 . Отношение D/D_0 и крутящий момент t изменяется асимптотически, причем, чем больше начальный угол подъема, тем сглаженнее.

Графически и аналитически получены решения уравнения (21). При этом, для рассматриваемых углов подъема пружины, предельные крутящие моменты оказались приблизительно равны, то есть, для всех пружин

$$t_{фт} = 102H \cdot \text{мм}.$$

Литература:

1. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. Бишкек, Илим, 1991, 116с.
2. Лихачев В.А. и др. Эффект памяти формы. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 216 с.
3. Материалы с эффектом памяти формы, Т.4 Справочное издание под общей ред. В.А. Лихачева. Санкт-Петербург, 1998, 268с. Т.4.
4. С.Д. Пономарев и др. Расчет на прочность в машиностроении, Т-1, Машгиз, М., 1956, 881 с.
5. С.Д. Пономарев, Л.Е. Андреева. Расчет упругих элементов машин и приборов. Машиностроение. М., 1980, 323 с.
6. И.А. Чернышев. Напряженное состояние и деформация цилиндрических пружин, свитых из круглого прутка. в кн. Динамика и прочность машин. М.: АН СССР, 1950, с. 7-78.
7. Мартенситная деформация никелида титана. / Паскаль Ю.И., Ерофеев В.Я., Монасевич Л.А. и др. // Изв. Вузов, Физика, 1982, №6, с. 103-117.
8. Ооцука К., Симудзу К., Судзуки Ю. Сплавы с эффектом памяти формы /Под ред. Фунакуба Х. Пер. с японск./ - М. Металлургия. 1990. -224 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сапиев А.Б.