

**МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА**

Кудайкулов А.К., Кенжегулов Б.З., Мырзашева А.Н.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УДЛИНЕНИЯ СТЕРЖНЯ ИЗ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ВСЕХ ВИДОВ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА И ОСЕВОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙ СИЛЫ**

УДК 539.3

Численно вычисляется величина удлинение стержня ограниченной длины из жаропрочного сплава при одновременной наличии частичной теплоизоляции, температуры, теплообмена и осевой растягивающей силы. Также учитывается зависимость между коэффициентом теплового расширения и температуры. Задача решается с использованием процедуры минимизации функционала полной тепловой энергии в сочетании аппроксимацией поле распределения температуры в локальном теплоизолированном участке стержня кривой второго порядка.

The size lengthening of a core of the limited length from a heat resisting alloy is numerically calculated at simultaneous presence of partial heat-insulation, temperatures, heat exchange and axial stretching force. Also dependence between factor of thermal expansion and temperature is taken into account. The problem is solved with the use of procedure of minimization functional of full thermal energy in a combination with approximation of field of distribution of temperature in local heat-insulated site of a core of a curve of the second order.

В современных газотурбинных и водородных двигателях различного назначения с учетом большего эксплуатационного температурного поля ( $20^{\circ}\text{C} \div 900^{\circ}\text{C}$ ) в качестве несущих элементов конструкции используются стержневые элементы изготовленных из специальных жаропрочных тугоплавких материалов. Один из основных свойств этих материалов заключается в том, что у них предел прочности на порядок больше чем обычной стали. Кроме того в этих материалах коэффициент теплового расширения является функцией температуры [1]. В связи с этим с инженерной точки зрения весьма актуально разработки универсального вычислительного алгоритма и метода позволяющей численно исследовать термомеханическое состояние стержней изготовленных из жаропрочных тугоплавких материалов при одновременном наличии частичной теплоизоляции, температуры, теплообмена и осевой растягивающей силы. В связи с этим рассмотрим вертикальную стержень ограниченной длины  $L$  [см]. Площадь поперечного сечения считаем постоянной по ее длине и обозначим через  $S$  [см<sup>2</sup>]. Коэффициент теплопроводности материала стержня  $K_{xx} \left[ \frac{\text{Вт}}{(\text{см} \cdot ^{\circ}\text{C})} \right]$ , модуль упругости которого  $E \left[ \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ . Верхней конец которого считаем жестко – заземленной. На нижнем конце приложено осевая растягивающая сила  $P$  [кГ]. Ось  $Ox$  направим вертикально сверху вниз. Начало координат совпадает с верхним заземленным концом. Предположим, что через площади поперечных сечений двух концов стержня происходит теплообмен с окружающими их средами. Коэффициентов теплообмена и температуры окружающих сред обозначим соответственно через  $h_0 \left[ \frac{\text{Вт}}{(\text{см}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})} \right]$ ,  $T_0$  [°C] и  $h_L, T_L$  (рис.-1).

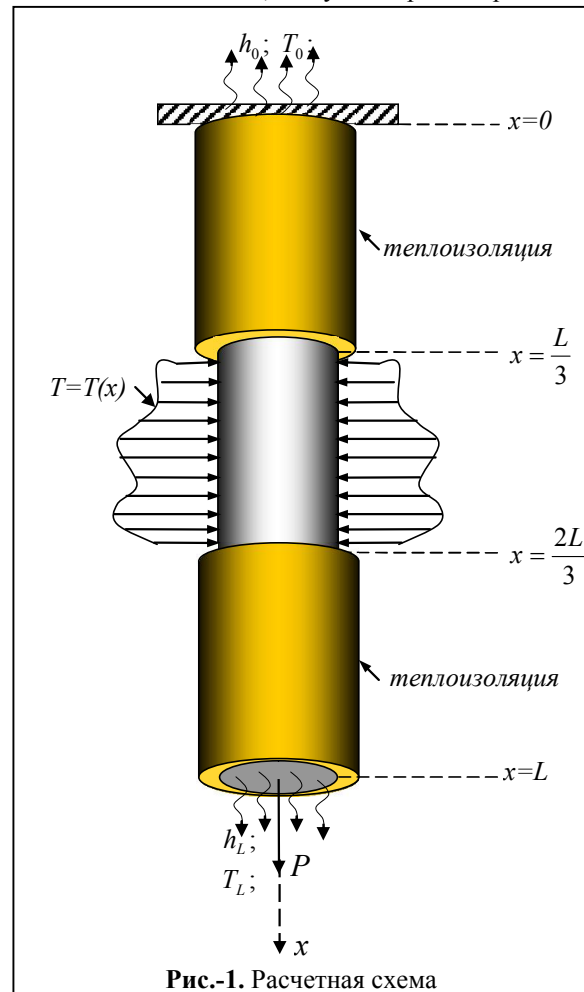


Рис.-1. Расчетная схема

Боковая поверхность участков  $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{3}\right)$  и  $\left(\frac{2L}{3} \leq x \leq L\right)$  стержня считаем теплоизолированной.

На участке  $\left(\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}\right)$  стержня задано температура  $T = T(x)$ . Требуется определить удлинение стержня от поля распределения температуры по всей ее длине и от осевой растягивающей силы  $P$ . Для этого сначала необходимо определить закон распределение поле температуры по длине стержня с учетом имеющихся разнородных граничных условий и зависимости между коэффициентом теплового расширения и температуры. По этому напишем выражение функционала полной тепловой энергии для участков стержня, где заранее не задана температура. Рассмотрим первый участок  $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{3}\right)$  стержня.

Для этой участки выражение соответствующего функционала имеет следующий вид [2]

$$J = \int_{V_1} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{S_0} \frac{h_0}{2} (T - T_0)^2 dS, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{3}\right) \quad (1)$$

где  $V$  – объем рассматриваемого участка стержня;  $S_0$  - площадь поперечного сечения верхнего конца стержня;  $h_0$  -коэффициент теплообмена между площадью поперечного сечения верхнего конца стержня с окружающей ее средой;  $T_0$  - температура окружающей  $S_0$  - площади среды.

Аналогично для третьей участки  $\left(\frac{2L}{3} \leq x \leq L\right)$  стержня имеем

$$J = \int_{V_3} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{S_L} \frac{h_L}{2} (T - T_L)^2 dS, \quad \left(\frac{2L}{3} \leq x \leq L\right) \quad (2)$$

где  $V_3$  - объем рассматриваемого участка стержня;  $S_L = S_0$ .

Так как на втором участке  $\left(\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}\right)$  стержня задано поле температур, то для этой участки нет необходимости написать выражение соответствующего функционала. Кроме того, учитывая, что исследуемый процесс является установившимся, то поле распределение температуры по длине участков  $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{3}\right)$  и  $\left(\frac{2L}{3} \leq x \leq L\right)$  будет в виде гладкой кривой. Тогда учитывая, что длины этих участков относительно малое, то поле распределение температур по длине участка можно аппроксимировать кривой второго порядка [3]. Это приводит, что по длине участков  $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{3}\right)$  и  $\left(\frac{2L}{3} \leq x \leq L\right)$  стержня в локальной системе координат поле распределение температуры можно представить в виде

$$T(x) = \varphi_i(x) \cdot T_i + \varphi_j(x) \cdot T_j + \varphi_k(x) \cdot T_k, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (3)$$

где  $\ell$  -длина участков;  $\ell = \frac{L}{3} - 0 = \frac{L}{3}$ ; или  $\ell = \frac{2L}{3} - \frac{L}{3} = \frac{L}{3}$ ;  $\varphi_i(x)$ ,  $\varphi_j(x)$ ,  $\varphi_k(x)$  - функции формы для квадратичного конечного элемента с тремя узлами [3];  $T_i = T(x = 0)$ ;  $T_j = T(x = \frac{\ell}{2})$ ;  $T_k = T(x = \ell)$ .

Тогда в пределах каждого рассматриваемого участка имеем, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \cdot T_i + \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \cdot T_j + \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \cdot T_k, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) после интегрирования имеем, что

$$J_1 = \frac{K_{xx} S}{2\ell} \left[ \frac{7}{3} T_1^2 - \frac{16}{3} T_1 T_2 + \frac{2}{3} T_1 T_3 - \frac{16}{3} T_2 T_3 + \frac{16}{3} T_2^2 + \frac{7}{3} T_3^2 \right] + \frac{S \cdot h_0}{2} (T_1 - T_0)^2 \quad (5)$$

где  $T_1 = T(x = 0)$ ;  $T_2 = T(x = \frac{L}{6})$ ;  $T_3 = T(x = \frac{L}{3})$ .

Аналогично из (2) имеем

$$J_2 = \frac{K_{xx} S}{2\ell} \left[ \frac{7}{3} T_5^2 - \frac{16}{3} T_5 T_6 + \frac{2}{3} T_5 T_7 - \frac{16}{3} T_6 T_7 + \frac{16}{3} T_6^2 + \frac{7}{3} T_7^2 \right] + \frac{S \cdot h_L}{2} (T_7 - T_L)^2 \quad (6)$$

где  $T_5 = T(x = \frac{2L}{3})$ ;  $T_6 = T(x = \frac{5L}{6})$ ;  $T_7 = T(x = L)$ .

В выражении  $J_1$  значение  $T_3$ , аналогично в  $J_2$  значение  $T_5$  считается известной. Потому, что на участке  $\left(\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}\right)$  стержня по условию задачи температура задана. В связи с этим для получение разрешающих систем уравнений минимизируем функционал  $J_1$  по  $T_1$  и  $T_2$ , а  $J_2$  по  $T_6$  и  $T_7$ . Вследствие чего получим следующую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial T_1} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot S}{2\ell} \left[ \frac{14}{3} T_1 - \frac{16}{3} T_2 + \frac{2}{3} T_3 \right] + Sh_0 \cdot T_1 - Sh_0 \cdot T_0 = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial T_2} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot S}{2\ell} \left[ -\frac{16}{3} T_1 - \frac{16}{3} T_3 + \frac{32}{3} T_2 \right] = 0 \\ \frac{\partial J_2}{\partial T_6} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot S}{2\ell} \left[ -\frac{16}{3} T_5 - \frac{16}{3} T_7 + \frac{32}{3} T_6 \right] = 0 \\ \frac{\partial J_2}{\partial T_7} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot S}{2\ell} \left[ \frac{2}{3} T_5 - \frac{16}{3} T_6 + \frac{14}{3} T_7 \right] + Sh_L \cdot T_7 - Sh_L \cdot T_L = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решая систему (7) вычислим значение температуры в узлах. Далее по (3) строится поле распределение температуры в каждом участке стержня. Для вычисления удлинение стержня от поля температуры необходимо знать зависимости между коэффициентом теплового расширения  $\alpha \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$  и температуры. С этой целью обратим внимание к результатам экспериментальных работ [1]. Например, для высококачественного жаропрочного тугоплавкого материала АНВ-300 зависимость  $\alpha = \alpha(T)$  в табличном виде будет следующим:

Значение температуры $T [^\circ C]$	20°	100°	200°	300°	400°
Соответствующее значение коэффициента теплового расширения $\alpha \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$10,1 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$11,9 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$13,2 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$14,7 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$17 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$

Значение температуры $T [^\circ C]$	500°	600°	700°	800°
Соответствующее значение коэффициента теплового расширения $\alpha \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$18,3 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$20,3 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$22 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$	$23,2 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ C} \right]$

Из приведенного графика натурального эксперимента [1] видно, что в интервалах температуры  $T$   $[20^\circ C - 100^\circ C]$ ,  $[100^\circ C - 200^\circ C]$ ,  $[200^\circ C - 300^\circ C]$ ,  $[300^\circ C - 400^\circ C]$ ,  $[400^\circ C - 500^\circ C]$ ,  $[500^\circ C - 600^\circ C]$ ,

$[600^{\circ}\text{C} - 700^{\circ}\text{C}]$ ,  $[700^{\circ}\text{C} - 800^{\circ}\text{C}]$  зависимость  $\alpha = \alpha(T)$  совпадает с прямыми линиями. После соответствующей математической обработки экспериментальных данных по материалу АНВ-300 получим следующее

$$\left. \begin{aligned} 1) 20^{\circ}\text{C} \leq T \leq 100^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,0225 \cdot 10^{-6} \cdot T + 9,65 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 2) 100^{\circ}\text{C} \leq T \leq 200^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,013 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,6 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 3) 200^{\circ}\text{C} \leq T \leq 300^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,015 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,2 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 4) 300^{\circ}\text{C} \leq T \leq 400^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,023 \cdot 10^{-6} \cdot T + 7,8 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 5) 400^{\circ}\text{C} \leq T \leq 500^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,013 \cdot 10^{-6} \cdot T + 11,8 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 6) 500^{\circ}\text{C} \leq T \leq 600^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,02 \cdot 10^{-6} \cdot T + 8,3 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 7) 600^{\circ}\text{C} \leq T \leq 700^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,017 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,1 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \\ 8) 700^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C} \text{ при } \alpha &= (0,012 \cdot 10^{-6} \cdot T + 13,6 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Теперь примем за исходные данные следующие значения  $L = 30[\text{см}]$ ;  $\ell = \frac{L}{3}$ ;

$$K_{xx} = 100 \left[ \frac{\text{Вт}}{(\text{см} \cdot ^{\circ}\text{C})} \right]; \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]; \quad S = \pi r^2; \quad r = 1[\text{см}]; \quad h_0 = h_L = 10 \left[ \frac{\text{Вт}}{(\text{см}^2 \cdot \text{C})} \right];$$

$$T_0 = T_L = 40[^{\circ}\text{C}]; \quad P = 1000[\text{кГ}]; \quad T(x) = -\frac{3040}{\ell^2} x^2 + \frac{3040}{\ell} x + 40, \quad \left( \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \right).$$

Кроме того, вычислим значение температур в узлах 3, 4 и 5, т.е.  $T\left(x = \frac{L}{3}\right) \Rightarrow T_3 = T_5 = 40[^{\circ}\text{C}]; \quad T\left(x = \frac{L}{2}\right) \Rightarrow T_4 = 800[^{\circ}\text{C}].$

При принятых исходных данных первые два уравнения системы имеет следующей вид

$$\left. \begin{aligned} 10T_1 - 8T_2 &= 80 \\ T_1 - 2T_2 &= 40 \end{aligned} \right\}$$

Решая, находим, что  $T_1 = T_2 = 40[^{\circ}\text{C}].$

Теперь рассмотрим последние два уравнений системы (7)

$$\left. \begin{aligned} 2T_6 - T_7 &= 40 \\ 4T_6 - 5T_7 &= 40 \end{aligned} \right\}$$

Решая, определим, что  $T_6 = T_7 = 40[^{\circ}\text{C}].$

Теперь находим удлинение стержня каждой участки стержня. Так, как по всей длине 1-ой  $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{3}\right)$  и 3-ой  $\left(\frac{2L}{3} \leq x \leq L\right)$  участков стержня значение температуры постоянное и равно  $T = 40[^{\circ}\text{C}]$  то, величина удлинение каждой из участков будут следующими

$$\Delta \ell_{T_1} = \Delta \ell_{T_3} = \int_0^{\ell} \alpha T(x) dx = \alpha \cdot T = 40\alpha.$$

Здесь значение  $\alpha$  определим из 1-го соотношения системы (8). Тогда

$$\alpha(T = 40 \text{ } ^\circ\text{C}) = 0,0225 \cdot 10^{-6} * 40 + 9,65 \cdot 10^{-6} = 10,55 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right].$$

Таким образом, значение удлинение 1-го и 3-го участка стержня будет одинаковыми

$$\Delta \ell_{T_1} = \Delta \ell_{T_3} = 40 * 10,55 \cdot 10^{-6} = 0,000422 [\text{см}]. \quad (9)$$

Теперь переходим к определению значение удлинение 2-ой  $\left( \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \right)$  участка. Так как на этом участке значение температуры будет не постоянное, а является функцией координат. Предположим, как  $T = T(x) \left( \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \right)$  и функция  $\alpha(x)$  на этом промежутке меняется квадратичным законом. Теперь ее построим. При  $T\left(x = \frac{L}{3}\right) = T\left(x = \frac{2L}{3}\right) = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$ . При  $T\left(x = \frac{L}{2}\right) = 800 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Учитывая, что значение  $\alpha(T = 40 \text{ } ^\circ\text{C}) = 10,55 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$  и  $\alpha(T = 800 \text{ } ^\circ\text{C}) = 23,2 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$ , представим

$$\alpha(x) = \varphi_i(x) \cdot \alpha_i + \varphi_j(x) \cdot \alpha_j + \varphi_k(x) \cdot \alpha_k, \quad \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \quad (10)$$

тогда значение удлинение второй участка  $\left( \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \right)$  стержня определяется следующим образом

$$\Delta \ell_{T_2} = \int_0^{\ell} \alpha(x) \cdot T(x) dx = \int_0^{\ell} [\varphi_i(x) \cdot \alpha_i + \varphi_j(x) \cdot \alpha_j + \varphi_k(x) \cdot \alpha_k] \cdot [\varphi_i(x) \cdot T_i + \varphi_j(x) \cdot T_j + \varphi_k(x) \cdot T_k] dx \quad (11)$$

Здесь  $\alpha_i = \alpha(x = \frac{L}{3})$ ;  $\alpha_j = \alpha(x = \frac{L}{2})$ ;  $\alpha_k = \alpha(x = \frac{2L}{3})$ ;  $T_i = T(x = \frac{L}{3})$ ;  $T_j = T(x = \frac{L}{2})$ ;  $T_k = T(x = \frac{2L}{3})$ .

После интегрирования из (11) имеем

$$\Delta \ell_{T_2} = \left[ \frac{2\ell}{15} \alpha_i \cdot T_i + \frac{\ell}{15} \alpha_i \cdot T_j - \frac{\ell}{30} \alpha_i \cdot T_k + \frac{\ell}{15} \alpha_j \cdot T_i + \frac{8\ell}{15} \alpha_j \cdot T_j + \frac{\ell}{15} \alpha_j \cdot T_k - \frac{\ell}{30} \alpha_k \cdot T_i + \frac{\ell}{15} \alpha_k \cdot T_j + \frac{2\ell}{15} \alpha_k \cdot T_k \right] = 0,00056267 [\text{см}]. \quad (12)$$

Таким образом, общее удлинение всего стержня от поля распределения температуры составляет

$$\Delta \ell_T = \Delta \ell_{T_1} + \Delta \ell_{T_2} + \Delta \ell_{T_3} = 0,014067 [\text{см}]. \quad (13)$$

В то время удлинение стержня от осевой растягивающей силы  $P$  определяется на основе Гука [4]

$$\Delta \ell_P = \frac{PL}{EF} = 0,00455 [\text{см}] \quad (14)$$

из (13) – (14) определим соотношение  $N = \frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_P} = 3,0918$  раза.

Это показывает, что в нашем случае удлинение стержня от поля распределение температур больше 3 раза, чем от осевой растягивающей силы  $P$ .

**Список использованных литератур:**

1. Химушин Ф.Ф. Жаропрочные стали и сплавы. 2-ое переработанное и дополненное издания. М.: Металлургия, 1969.-749с.
2. Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. М., Мир, 1967, 247 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., Мир, 1979, 392 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьяр ДЖ.Н. Теория упругости. М., Наука, 1975, 575 с.

**Рецензент: доктор ф-м. наук, профессор Абдрахманов С.**