***Иманалиев М.И., Байзаков А.Б.***

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*Изучена разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.*

*Resolvability of a problem of Koshi for the integro-differential equations in private derivatives of the fourth order is studied.*

Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных дающие возможность математического представления процессов с последействием, протекающих в пространстве и во времени играют важную роль в математике и ее приложениях. В [1, 2] найдены разрешимость и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. Целью настоящей работы является изучение разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$L_1[u]+L_2[u]\beta+L_3[u]=f(t,x,u,u_t,u_x)+\int_0^t K(t,\nu,x,u(\nu),u_t(\nu),u_x(\nu))d\nu \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad (2)$$

$$u_t(0,x)=\psi(x), \quad (3)$$

где

$$L_1[u]=u_{tt}+2\alpha u_t+\left(\alpha^2+1\right)u,$$

$$L_2[u]=u_{ttx}+2\alpha u_{tx}+\beta u_{tt}+2\alpha\beta u_t+\left(\alpha^2+1\right)u_x+\left(\alpha^2+1\right)\beta u.$$

$$L_3[u]=u_{ttxx}+2\alpha u_{txx}+2\alpha\beta u_{tx}+\left(\alpha^2+1\right)u_{xx}+\left(\alpha^2+1\right)\beta u_x,$$

$\alpha,\ \beta$ - положительные постоянные, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции. Предположим, что функции $f(t,x,u,u_t,u_x)$, $K(t,s,x,u,u_t,u_x)$ непрерывны в области $G=\left\{t\in\left[o,T\right],-\infty<x<+\infty\right\}$ и удовлетворяют условию Липшица:

$$\left|f(t,x,u_2,v_2,w_2)-f(t,x,u_1,v_1,w_1)\right|\le L_1\left[\left|u_2-u_1\right|+\left|v_2-v_1\right|+\left|w_2-w_1\right|\right], \quad (4)$$

$$\left|K(t,s,x,u_2,v_2,w_2)-K(t,s,x,u_1,v_1,w_1)\right|\le L_2\left[\left|u_2-u_1\right|+\left|v_2-v_1\right|+\left|w_2-w_1\right|\right]. \quad (5)$$

Пусть

$$\left|f(t,x,u,u_t,u_x)\right|\le M_1, \quad (6)$$

$$\left|K(t,s,x,u(s),u_t(s),u_x(s))\right| \le M_2 . \tag{7}$$

В данной работе использован метод решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, предложенный в [1, 2]. Основой метода является преобразования решений исходной задачи Коши в эквивалентное ей интегральное уравнение Вольтерра, к которой уже применим топологический метод – принцип сжатых отображений.

Будем искать решение задачи Коши (1)-(3) в виде

$$u(t,x) = c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s)\sin(x-\rho)Q(s,\rho)\,d\rho ds , \tag{8}$$

где $c(t,x)$ известная и в области $G$ достаточно гладкая функция, такая что $c(0,x)=\varphi(x)$, $c_t(0,x)=\psi(x)$, $Q(t,s)$ - неизвестная функция, значения $\alpha,\ \beta$ будем определять позже.

Из (8) находим частные производные функции $u(t,x)$. Имеем

$$u_t = c_t - \alpha(u-c) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \cos(t-s)\sin(x-\rho)Q(s,\rho)\,d\rho ds , \tag{9}$$

$$u_{tt} + \alpha u_t = c_{tt} + \alpha c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(x-\rho)Q(t,\rho)\,d\rho -$$

$$-\alpha(u_t + \alpha u - c_t - \alpha c) - (u-c),$$

т.е.

$$L_1[u] = c_{tt} + 2\alpha c_t + (\alpha^2+1)c + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(x-\rho)Q(t,\rho)\,d\rho ; \tag{10}$$

$$u_{ttx} + 2\alpha u_{tx} + (\alpha^2+1)u_x = c_{ttx} + 2\alpha c_{tx} + (\alpha^2+1)c_x -$$

$$-\beta\left[u_{tt} + 2\alpha u_t + (\alpha^2+1)u - c_{tt} - 2\alpha c_t - (\alpha^2+1)c\right] +$$

$$+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \cos(x-\rho)Q(t,\rho)\,d\rho ; \tag{11}$$

$$u_x = c_x - \beta\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s)\sin(x-\rho)Q(s,\rho)\,d\rho ds +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s)\cos(x-\rho)Q(s,\rho)\,d\rho ds . \tag{12}$$

Из (11)

$$L_2[u] = u_{ttx} + 2\alpha u_{tx} + \beta u_{tt} + 2\alpha\beta u_t + (\alpha^2+1)u_x + (\alpha^2+1)\beta u =$$

$$= L_2[c] + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \cos(x-\rho)Q(t,\rho)\,d\rho . \tag{13}$$

Дифференцируя (13) по $t$ получим

$$L_3[u] = u_{ttxx} + 2\alpha u_{txx} + \beta u_{ttx} + 2\alpha\beta u_{tx} + (\alpha^2+1)u_{xx} + (\alpha^2+1)\beta u_x =$$

$$= c_{ttxx} + 2\alpha c_{txx} + \beta c_{ttx} + 2\alpha\beta c_{tx} + (\alpha^2+1)c_{xx} + (\alpha^2+1)\beta c_x + Q(t,x) -$$

$$-\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\rho)} sin(x-\rho)Q(t,\rho)d\rho - \beta\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\rho)} cos(x-\rho)Q(t,\rho)d\rho. \qquad (14)$$

Сложив почленно, из (10), (13), (14) имеем

$$L_1[u]+L_2[u]\beta+L_3[u]=L_1[c]+L_2[c]\beta+L_3[c]+Q(t,x). \qquad (15)$$

Из исходного уравнения (1), учитывая (8), (9), (12), (15) имеем

$$\begin{aligned}
Q(t,x) = f\Bigg( & t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds, \\
& c_t-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds+ \\
& +\int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} cos(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds,\ c_x- \\
& -\beta\int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds+ \\
& +\int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)cos(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds\Bigg)+ \\
& +\int_0^t K\Bigg[t,\nu,x,c+\int_0^{\nu}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds,\ c_t- \\
& -\alpha\int_0^{\nu}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds+ \\
& +\alpha\int_0^{\nu}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} cos(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds,\ c_x- \\
& -\beta\int_0^{\nu}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds+ \\
& +\int_0^{\nu}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} sin(t-s)cos(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds\Bigg]d\nu - H(t,c) \equiv PQ,
\end{aligned} \qquad (16)$$

Где $H(t,c) \equiv L_1[c]+L_2[c]\beta+L_3[c]$.

К нелинейному интегральному уравнению (16) применим принцип сжатых отображений.

Пусть $\Omega$ - множество непрерывных о полосе функций $Q(t,x)$, причем $\|Q(t,x)\| \le h$:

$$\Omega = \{Q(t,x): t\in[o,T_1],\ x\in(-\infty,+\infty),\ \|Q\|\le h\},$$

величины $T_1$ и $h$ будут определяться ниже. Из уравнения (16) имеем

$$\|P(Q)\| \le M_1 + M_2T + M_3,$$

где

$$M_3 = \|H(t,c)\|.$$

Выберем $T_1,\ h$ такое, что

$$M_1 + M_2T_1 + M_3 \le h. \qquad (17)$$

Тогда оператор $PQ$ определенный правой частью (16) переводит множество $\Omega$ в себя. Покажем теперь, что оператор $PQ$ является оператором сжатия. Из (16) используя условие Липшица, имеем

$$\|PQ_2 - PQ_1\| \le L_1\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\left(3+\alpha+\beta\right)\|Q_2-Q_1\|d\rho ds +$$

$$+L_2\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\nu\int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\left(3+\alpha+\beta\right)\|Q_2-Q_1\|d\rho ds\right)d\nu =$$

$$= L_1\left(3+\alpha+\beta\right)\|Q_2-Q_1\|\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left(\frac{1}{\beta}e^{-\beta(x-\rho)}\Bigg|_{\rho=-\infty}^x\right)ds +$$

$$+L_2\left(3+\alpha+\beta\right)\|Q_2-Q_1\|\int\limits_0^t\left\{\int\limits_0^\nu e^{-\alpha(t-s)}\left(\frac{1}{\beta}e^{-\beta(x-\rho)}\Bigg|_{\rho=-\infty}^x\right)ds\right\}d\nu \le$$

$$\le L_1\left(3+\alpha+\beta\right)\|Q_2-Q_1\|\frac{1}{\alpha\beta} + L_2\left(3+\alpha+\beta\right)\|Q_2-Q_1\|\frac{T}{\alpha\beta} \le$$

$$\le \frac{\left(3+\alpha+\beta\right)\left(L_1+L_2T\right)}{\alpha\beta}\|Q_2-Q_1\|. \qquad (18)$$

Теперь наложим на $\alpha,\ \beta$ и $T_1 \le T$ следующее ограничение

$$\frac{3+\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left(L_1+L_2T_1\right) < 1. \qquad (19)$$

Тогда из (18) следует, что оператор $PQ$ есть оператор сжатия на множестве $\Omega$. По принципу сжатых отображений следует, что нелинейное интегральное уравнение (16) имеет единственное решение $Q(t,x)\in\Omega$.

Подставив найденную функцию в (8) получим решение задачи Коши (1)-(3).

Теперь изучим дифференциальные свойства решений задачи (1)-(3). Для всех $\left\{t\in\left[o,T_1\right], -\infty < x < +\infty\right\}$ из равенства (8) имеем

$$\|u\| = \left\|c(t,x) + \int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin\left(t-s\right)\sin\left(x-\rho\right)Q\left(s,\rho\right)d\rho ds\right\| \le$$

$$\le c_0 + \frac{h}{\alpha\beta} = const.$$

Для всех $t\in[0,T_1],\ -\infty < x < \infty$. Из равенства (9) получаем

$$\|u_t(t,x)\| \le \|c_t\| + \alpha\left(\|u\| + \|c\|\right) + \int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x e^{\alpha(x-s)-\beta(x-\rho)}\left|\cos(t-s)x\sin(x-\rho)\right|\|Q(s,\rho)\|d\rho ds \le$$

$$\le c_1 + \alpha\left(2c_0 + \frac{h}{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{\alpha\beta}h = const.$$

Аналогично, из (10)-(14) можно доказать, что все производные входящие в уравнение (1) равномерно ограничены.

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (4-7), (17), (19). Тогда задача Коши для интегро-дифференциального уравнения в частных производных (1)-(3) имеет единственное решение. Кроме того, все производные входящие в уравнение (1), равномерно ограничены.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек:Илим, 2008.-Вып.38.-С.3-8.
2. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Высшая школа Казахстана, сер. ест.-техн. наук. Приложение (поиск) №1, 2009.
3. Иманалиев М.И., Иманалиев Т.М., Какишев К. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек : Илим, 2007.- Вып. 36.- С. 19-28.