Туганбаев М.М.

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЕРНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Tuganbaev M.M.

DIRECT PROBLEM FOR THE KINETIC EQUATION WITH THE TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTION FUNCTION

УДК 517.9

В работе рассматривается прямая задача для линейного дифференциального уравнения типа Больцмана для двумерной функции распределения.

In this article is studied direct problem for the linear differential equation Boltzman type with two-dimensional distribution function.

В работе рассматривается прямая задача для линейного дифференциального уравнения типа Больцмана для двумерной функции распределения. Прямая задача в односкоростном случае была изучена в работе [1]-[2]. Задачи такого типа возникают, например, в изучении «вылета» электронов ионизированной плазмы, в теории полупроводников, в биофизике [3]-[7].

Задача. Пусть рассматривается линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial f(u,\upsilon,t)}{\partial t}+a(u)\frac{\partial f(u,\upsilon,t)}{\partial u}+b(\upsilon)\frac{\partial f(u,\upsilon,t)}{\partial \upsilon}+h_0(u,\upsilon)f(u,\upsilon,t)=F(u,\upsilon,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$f(u,\upsilon,t)\big|_{t=0}=f_0(u,\upsilon),\quad (u,\upsilon,t)\in\Omega\equiv R^2\times R_+,\quad R_+=[0,\infty), \tag{2}$$

где $F(u,\upsilon,t)$ - заданная функция, $h_0(u,\upsilon)$- известная неотрицательная функция, для которой имеет место разложение

$$h_0(u,\upsilon)=\lambda_1(u)+\lambda_2(\upsilon)+h(u,\upsilon), \tag{3}$$

а неизвестная функция $f(u,\upsilon,t)$ в ряде задач переноса представляет собой функцию распределения, зависящую от фазовых переменных $u,\upsilon\in(-\infty,+\infty)$ и времени $t\geq 0$.

I. Для решения прямой задачи введем преобразование вида

$$f(u,\upsilon,t)=Q(u,\upsilon,t)\exp\left(-\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right),\quad \forall u,\upsilon\in R^2,\ \forall t\in R_+. \tag{4}$$

Тогда для новой неизвестной функции $Q(u,\upsilon,t)$ получим задачу :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q(u,\upsilon,t)}{\partial t}+a(u)\dfrac{\partial Q(u,\upsilon,t)}{\partial u}+b(\upsilon)\dfrac{\partial Q(u,\upsilon,t)}{\partial \upsilon}=\\ =\exp\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi+\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)\left[F(u,\upsilon,t)-h(u,\upsilon)f(u,\upsilon,t)\right],\\ Q(u,\upsilon,t)\big|_{t=0}=\varphi(u,\upsilon),\forall(u,\upsilon)\in R^2,\end{cases} \tag{5}$$

где $(f;Q)$ - решение системы (4), (5), а

$$\varphi(u,\upsilon)=f_0(u,\upsilon)\exp\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi+\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right). \tag{6}$$

Введем функции $\rho_1=\rho_1(u,t,s)$, $\rho_2=\rho_2(\upsilon,t,s)$, для которых имеют место условия

$$\rho'_{1t}(u,t,s)+a(u)\rho'_{1u}(u,t,s)=0,\quad \rho_1(u,t,t)=u;$$

$$\rho'_{2t}(\upsilon,t,s)+b(\upsilon)\rho'_{2\upsilon}(\upsilon,t,s)=0,\quad \rho_2(\upsilon,t,t)=\upsilon. \tag{7}$$

Лемма 1. При условии (7) задача (5) приводится к эквивалентному виду

$$Q(u,\upsilon,t)=\varphi(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0))+\int_0^t \exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1(u,t,s)}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2(\upsilon,t,s)}\frac{\lambda(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)\times \tag{8}$$
$$\times\left[F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)-h(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s))f(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)\right]ds.$$

Доказательство. В самом деле, обозначая $\rho_{10}\equiv\rho_1(u,t,0)$, $\rho_{20}\equiv\rho_2(\upsilon,t,0)$ и дифференцируя (8) по t, u и υ:

$$Q'_t=\varphi'_u(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{10t}+\varphi'_\upsilon(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{20t}+\exp\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$
$$\times\left[F(u,\upsilon,t)-h(u,\upsilon)f(u,\upsilon,t)\right]+\int_0^t\exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left(\frac{\lambda_1(\rho_1)}{a(\rho_1)}\rho'_{1t}+\frac{\lambda_2(\rho_2)}{b(\rho_2)}\rho'_{2t}\right)\times$$
$$\times\left[F(\rho_1,\rho_2,s)-h(\rho_1,\rho_2)f(\rho_1,\rho_2,s)\right]ds+\int_0^t\exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$
$$\times\left[F'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1t}+b(s)F'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2t}-\left(h'_u(\rho_1,\rho_2)\rho'_{1t}+h'_\upsilon(\rho_1,\rho_2)\rho'_{2t}\right)f(\rho_1,\rho_2,s)-\right.$$
$$\left.-h(\rho_1,\rho_2)\left(f'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1t}+f'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2t}\right)\right]ds,$$
$$Q'_u=\varphi'_u(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{10u}+\int_0^t\exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\frac{\lambda_1(\rho_1)}{a(\rho_1)}\rho'_{1u}\times$$
$$\times\left[F(\rho_1,\rho_2,s)-h(\rho_1,\rho_2)f(\rho_1,\rho_2,s)\right]ds+\int_0^t\exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$
$$\times\left[F'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1u}-h'_u(\rho_1,\rho_2)\rho'_{1u}f(\rho_1,\rho_2,s)-h(\rho_1,\rho_2)f'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1u}\right]ds,$$
$$Q'_\upsilon=\varphi'_\upsilon(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{20\upsilon}+\int_0^t\exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\frac{\lambda_2(\rho_2)}{b(\rho_2)}\rho'_{2\upsilon}\times$$
$$\times\left[F(\rho_1,\rho_2,s)-h(\rho_1,\rho_2)f(\rho_1,\rho_2,s)\right]ds+\int_0^t\exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}+\int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$
$$\times\left[F'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2\upsilon}-h'_\upsilon(\rho_1,\rho_2)\rho'_{2\upsilon}f(\rho_1,\rho_2,s)-h(\rho_1,\rho_2)f'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2\upsilon}\right]ds,$$

а затем подставляя в (5), получим тождество

$$\exp\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi+\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)F(u,\upsilon,t)\equiv\exp\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi+\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)F(u,\upsilon,t),$$ что и требовалось доказать.

Уравнения (4), (8) представляют собой линейную функционально-алгебраическую систему относительно $(f;Q)$, и функцию $Q(u,\upsilon,t)$ можно исключить из этой системы. Поэтому, подставляя (8) в (4) и проведя алгебраические операции, получим

$$f(u,\upsilon,t)=f_0(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0))\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,0)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi-\int_{\rho_2(\upsilon,t,0)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)+$$
$$+\int_0^t\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,s)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi-\int_{\rho_2(\upsilon,t,s)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)\times$$
$$\times\left[F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)-h(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s))f(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)\right]ds. \tag{9}$$

Лемма 2. Уравнение (9) является эквивалентным интегральным представлением задачи (1), (2).

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Исследуем здесь вопросы ограниченности решения и его единственности.

Теорема. Пусть для задачи (1), (2) имеют место условия :

а₁) $h_0(u,\upsilon)$- известная неотрицательная функция, для которой имеет место разложение $h_0(u,\upsilon)=\lambda_1(u)+\lambda_2(\upsilon)+h(u,\upsilon)$ и выполняется

$$\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left|h(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s))\right|ds \le \gamma_1 < 1,$$

а$_2$) $f_0(u,\upsilon)$ - известная неотрицательная функция такая, что $f_0(u,\upsilon)\in C(R^2)$, при этом

$$\left|f_0(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0))\right|\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,0)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,0)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\le \gamma_2 = const,\ \forall u,\upsilon,t\in R^2\times R_+;$$

а$_3$) $$\sup_{R^2\times R_+}\int_0^t \exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,0)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,0)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left|F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)\right|ds \le \gamma_3 = const,$$

$\gamma = \gamma_2 + \gamma_3$.

Тогда задача (1) - (2) имеет единственное ограниченное решение в пространстве $C^{1,1,1}(\Omega)$ с оценкой $\|f(u,\upsilon,t)\|_C \le \frac{\gamma}{1-\gamma_1}$.

Доказательство. Действительно, оценивая (9), получим неравенство

$$\left|f(u,\upsilon,t)\right| \le \left|f_0(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0))\right|\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,0)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,0)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)+$$
$$+\int_0^t \exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,s)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,s)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left|F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)\right|ds+$$
$$+\int_0^t \exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,s)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,s)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left|h(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s))\right|\left|f(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)\right|ds.$$

Переходя в этом неравенстве к норме и учитывая условия теоремы, окончательно получим $\|f(u,\upsilon,t)\|_C \le \frac{\gamma}{1-\gamma_1}$, что и доказывает ограниченность функции $f(u,\upsilon,t)$ в классе функций $C^{1,1,1}(\Omega)$.

Единственность доказывается методом от противного, то есть предполагая существование решений $f(u,\upsilon,t)$ и $\bar{f}(u,\upsilon,t)$, получим неравенство

$\left\|f(u,\upsilon,t)-\bar{f}(u,\upsilon,t)\right\|_C \le 0$, откуда и следует единственность решения.

Замечание. Если в уравнении (1) $a(u)=a=const, b(\upsilon)=\upsilon=const$, то интегральное преобразование будет выглядеть следующим образом

$$f(u,\upsilon,t)=Q(u,\upsilon,t)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{u}\lambda_1(\xi)d\xi-\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\upsilon}\lambda_2(\eta)d\eta\right),$$

а интегральное представление задачи (1) - (2) запишется в виде

$$f(u,\upsilon,t)=f_0(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s))\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{u}\lambda_1(\xi)d\xi-\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\upsilon}\lambda_2(\eta)d\eta\right)+$$
$$+\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{u}\lambda_1(\xi)d\xi-\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\upsilon}\lambda_2(\eta)d\eta\right)\left[F(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s),s)-\right.$$
$$\left.-h(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s))f(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s),s)\right]ds.$$

Литература

1. Т. Д. Омуров, М. М. Туганбаев. Интегральное преобразование линейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Наука и новые технологии.-Бишкек, 2006, № 3-4, - С.8-12.
2. М.М. Туганбаев. Нестационарная задача в теории переноса заряженных частиц // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Естествен.-техн. науки. Материалы междунар. научн. конф. «Физика и физическое образование: достижения и перспективы развития». – Бишкек, 2006, Сер.3. - Вып. 3, - С.135-137.
3. Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana, Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams //Journal Math. Phys., - 1989, - Vol. 30. - No. 5,- P.1177-1186.
4. G. Gavalleri and S. L. Paveri-Fontana //Phys. Rev. A 6. 327, - 1972.

5. V. V. Parail and O. P. Pogutse, Runaway electrons in a plasma // Reviews of Plasma Physics, edited by M. A. Leontovich. Consultans Bureau. New York, - 1986, - Vol. 11.
6. M. C. Mackey // Biophys. J. 11, 75, - 1971.
7. A. Majorana, Space homogeneous solutions of the Boltzmann equation describing electron-phonon interactions in semiconductors // Transport Theory Statist. Phys. – 1991, - 20, p.261-279.