Омуров Т.Д., Туганбаев М.М.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Omurov T.D., Tuganbaev M.M.

INTEGRAL TRANSFORMATION FOR THE DEGENERATE KINETIC EQUATION

УДК 517.9

Настоящая работа посвящается исследованию прямых задач для вырожденного дифференциального кинетического уравнения.

This article is devoted to research of direct problems for the differential kinetic equation.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon\left(f_{\varepsilon tt}(x,t)-a^2 f_{\varepsilon xx}(x,t)\right)+B(x)\left(f_{\varepsilon t}(x,t)+af_{\varepsilon x}(x,t)\right)+h(x,t)f_{\varepsilon}(x,t)=F(x,t) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$f_{\varepsilon}(x,t)|_{t=0}=\varphi_{\varepsilon}(x),\ f_{\varepsilon t}(x,t)|_{t=0}=\psi_{\varepsilon}(x)\ . \qquad (2)$$

Ранее были рассмотрены задачи [2-4]:

I. $$\frac{\partial f(\upsilon,t)}{\partial t}+a(\upsilon)\frac{\partial f(\upsilon,t)}{\partial \upsilon}+h(\upsilon)f(\upsilon,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(\upsilon,\upsilon')h(\upsilon')f(\upsilon',t)d\upsilon'\equiv Kf,$$

$$f(\upsilon,t)\big|_{t=0}=f_0(\upsilon),\quad (\upsilon,t)\in\Omega\equiv R\times R_+,\quad R_+=[0,\infty),\quad a(\upsilon)>0\,.$$

II. $$\frac{\partial f(\upsilon,t)}{\partial t}+a(\upsilon)\frac{\partial f(\upsilon,t)}{\partial \upsilon}=h(\upsilon)\{c(t)f_m(\upsilon)-f(\upsilon,t)\},\quad f(\upsilon,0)=f_m(\upsilon),$$

где $c(t)=\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\upsilon)f(\upsilon,t)d\upsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\upsilon)f_m(\upsilon)d\upsilon}$ - параметр нормализации, а функция

$f_m(\upsilon)=\sqrt{\dfrac{\beta}{\pi}}\exp\left(-\beta\upsilon^2\right)$ нормализована Максвеллом в виде

$$\left\langle\upsilon^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f_m(\upsilon)\upsilon^2 d\upsilon=(2\beta)^{-1}\,\cdot$$

III. $$\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial \upsilon}+h(\upsilon)f(\upsilon,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\kappa(\upsilon,\upsilon')h(\upsilon')f(\upsilon',t)d\upsilon'.$$

Задачи этого типа возникают в ряде научных областей: в изучении «вылета» электронов в полностью ионизированной плазме в расчетах постоянной проводимости в биологических мембранах, в теории полупроводников [1].

В теории переноса частиц, при изучении движения равномерно распределенной группы заряженных частиц под действием постоянного электрического поля, приложенного к системе, линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Больцмана в форме Каца описывает распределение электронов $f(\upsilon,t)$ в полностью ионизированной среде как функцию скорости $\upsilon \in (-\infty,+\infty)$ и времени $t \geq 0$. Электростатическое ускорение *a* предполагается постоянным и положительным. Выражения $h(\upsilon)$ и $\kappa(\upsilon,\upsilon')d\upsilon'$ обозначают частоту столкновений (между электронами и окружающей средой) и соответственно вероятность, что электрон столкнется со скоростью υ' и выйдет из столкновения со скоростью в интервале $[\upsilon,\upsilon+d\upsilon]$; при этом:

$$0 \leq \kappa(\upsilon,\upsilon') \ , \ \int_{-\infty}^{+\infty}\kappa(\upsilon,\upsilon')d\upsilon' = 1.$$

Распределение электронов $f(\upsilon,t)$ и частота столкновений $h(\upsilon)$ должны быть неотрицательными.

Воспользуемся подстановкой:

$$f_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \eta_\varepsilon(x,t), \tag{3}$$

где $u(x,t) \in C^{2,2}(\Omega)$ есть решение вырожденного уравнения

$$B(x)(u_t(x,t) + au_x(x,t)) + h(x,t)u(x,t) = F_0(x,t),$$

которое перепишем в виде

$$u_t(x,t) + au_x(x,t) + B^{-1}(x)h(x,t)u(x,t) = B^{-1}(x)F_0(x,t), \tag{4}$$

с начальным условием

$$u(x,t)_{t=0} = \varphi_0(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi_0(x). \tag{5}$$

Вводя преобразование

$$u(x,t) = Q(x,t)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right), \tag{6}$$

вырожденную задачу (4) – (5) сведем к задаче

$$Q_t + aQ_x = \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\left[B^{-1}(x)F_0(x,t) + \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\cdot u(x,t)\right],$$

(7)

$$Q(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x)\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right) \equiv \varphi_1(x), \tag{8}$$

которую представим в эквивалентном виде

$$Q(x,t) = \varphi_1(x-at) + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[B^{-1}(x-a(t-s))F_0(x-a(t-s),s) +$$

$$+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(x-a(t-s),s)\Big]ds.$$

(9)

Лемма 1. Интегральное уравнение (9) эквивалентно задаче (4) – (5).

Доказательство. Дифференцируя (9) по t и x:

$$Q_t = -a\varphi_{1x}(\tau_6) + \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)\right)\left[B^{-1}(x)F_0(x,t) + \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\cdot u(x,t)\right] +$$

$$+\int_0^t \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[-B^{-2}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)h(\tau_1,s) + aB^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s) -$$

$$-aB^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s) - \frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau_1,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s) - B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)u(\tau_1,s) -$$

$$-\int_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau u_x(\tau_1,s)\Big]ds,$$

$$Q_x = \varphi_{1x}(\tau_6) + \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[\frac{1}{a}B^{-2}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)h(\tau_1,s) - B^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s) +$$

$$+B^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s) + \frac{1}{a^2}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s) + \frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)u(\tau_1,s) +$$

$$+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u_x(\tau_1,s)\Big]ds$$

и подставляя в (7), получим тождество. Начальное условие (8) удовлетворяется очевидно. Лемма доказана.

Исключая теперь функцию Q из системы (6), (9), имеем

$$u(x,t) = \varphi_0(x-at)\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-at} B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right) +$$

$$+\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\cdot\int_0^t \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[B^{-1}(x-a(t-s))F_0(x-a(t-s),s) +$$

$$+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(x-a(t-s),s)\Big]ds. \qquad (10)$$

Лемма 4.1.3. Интегральное уравнение (10) эквивалентно задаче (4) – (5).

Доказательство. Дифференцируя (10) по t и x:

$$u_t = B^{-1}(x)F_0(x,t)+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)u(x,t)+\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_6}B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\times$$

$$\times\left[-a\varphi_{0x}(\tau_6)-\varphi_0(\tau_6)B^{-1}(\tau_6)h(\tau_6,0)-\frac{1}{a}\varphi_0(\tau_6)\cdot\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\right]+\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{a}\int\limits_{\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\left[B^{-1}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)\right]ds+\right.$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\left[-B^{-2}(\tau_1)h(\tau_1,s)F_0(\tau_1,s)-\frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)+\right.$$

$$\left.\left.+aB^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s)-aB^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s)-B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)\cdot u(\tau_1,s)-\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u_x(\tau_1,s)\right]ds\right\},$$

$$u_x = \exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_6}B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\left[\varphi_{0x}(\tau_6)+\frac{1}{a}\varphi_0(\tau_6)B^{-1}(\tau_6)h(\tau_6,0)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\varphi_0(\tau_6)B^{-1}(x)h(x,t)\right]+\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)\right)\left\{-\frac{1}{a}B^{-1}(x)h(x,t)\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\times\right.$$

$$\times\left[B^{-1}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)\right]ds+\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{a}B^{-2}(\tau_1)h(\tau_1,s)F_0(\tau_1,s)+\frac{1}{a^2}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)-B^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\right.$$

$$\left.\left.+B^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s)+\frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)\cdot u_x(\tau_1,s)\right]ds\right\}$$

и подставляя в уравнение (4) получим тождество

$B^{-1}(x)F_0(x,t)\equiv B^{-1}(x)F_0(x,t)$.

Теорема 1. При выполнении условий:

а) $|\varphi_0(x-at)|\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-at}B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\leq\gamma_4$,

b) $\exp\left(-\dfrac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\dfrac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)B^{-1}(x-a(t-s))\left|F_0(x-a(t-s),s)\right|ds \le \gamma_5$,

$\gamma_6 = \gamma_4 + \gamma_5$,

c) $\dfrac{1}{a}\exp\left(-\dfrac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\dfrac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)}\left|B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)\right|d\tau \le \gamma_7$, $\gamma_7 < 1$,

единственное решение задачи (4) – (5) равномерно ограничено.

Доказательство. Действительно, при выполнении условий a – c, имеем

$|u(x,t)| \le \gamma_6 + \gamma_7\|u(x,t)\|$, откуда следует

$\|u(x,t)\| \le \dfrac{\gamma_6}{1-\gamma_7}$, что и завершает доказательство теоремы.

Методом от противного, то есть предполагая существование двух решений $u(x,t)$, $\bar{u}(x,t)$, доказывается единственность решения.

Литература

1. Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana, Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams //Journal Math. Phys., - 1989, - Vol. 30. - No. 5, - P.1177-1186.
2. Омуров Т.Д., Туганбаев М.М. Интегральное преобразование линейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.- Бишкек, 2006.- Вып. 35.- С. 67-73.
3. Омуров Т.Д., Туганбаев М.М. Интегральное преобразование линейного дифференциального уравнения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.- Бишкек, 2007.- Вып. 36.- С. 113-117.
4. Туганбаев М.М. Нестационарная задача в теории переноса заряженных частиц // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Естественн.-техн. науки.- Бишкек, 2006, Сер. 3. Вып. 3.- С. 135-137.