Шарапов С.

ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ

S. Sharapov

GEOMETRY OF LEVEL SURFACES

УДК 513.8

В работе доказано, что поверхности уровня дифференцируемой функции без критических точек, заданной на полном односвязном многообразии, являются некомпактными подмногообразиями.

In this paper it is proved that level surfaces of the differentiable function which has not critical points and given on complete simple connected manifold, will be non-compact sub manifolds.

В дифференциальной геометрии изучаются общие локальные свойства кривых и поверхностей. С этой точки зрения самой простой поверхностью является поверхность уровня дифференцируемой функции, хотя геометрия «в целом » поверхности уровня может быть достаточно сложной. Например, поверхность уровня может иметь несколько компонентов связности.

Пусть *M*- гладкое риманово многообразие размерности *n*, $f\ :M\to R^1$ - дифференцируемая функция. Множество

$$L_c=\{p\in M^n : f(p)=c\},$$

где *c*-некоторое значение функции *f*, называется множеством (поверхностью) уровня. Если множество L_c не содержит критических точек, то оно является гладким подмногообразием *M* размерности *n-1* [1].

В работах [1 – 4] изучена геометрия поверхностей уровня так называемых метрических функций.

Определение. Пусть *M*-гладкое риманово многообразие размерности *n*.
Функция $f:M\to R^1$ из класса $C^2\ (M,R^1\ )$, длина градиента которой постоянна на компонентах связности множеств уровня, называется метрической функцией.

Впервые поверхности уровня метрических функций изучены в работе [1]. В работе [2] доказано, что каждая поверхность уровня метрической функции является линейно связным множеством, т.е. имеет одну компоненту связности. В работе [3] доказано если на односвязном многообразии *M* дана дифференцируемая функция $f:M\to R^1$, без критических точек, то для каждого $c\epsilon R^1$ многообразие (поверхность уровня) $L_c=\{p\epsilon M^n:f(p)=c\}$линейно связно тогда и только тогда, когда для каждого сегмента $A\subset R^1$ его полный прообраз $f^{-1}\ (A)$ является линейно связным множеством.

В работе [4] получена полная классификация слоений евклидова пространства, порожденных метрическими функциями.

Настоящая работа посвящена геометрию «в целом» поверхностей уровня дифференцируемой функции без предположения о метричности.

Теорема. Пусть *M*- гладкое полное односвязное риманово много образие, $f:M\to R$-гладкая (класса C^r, $r\geq 2$) функция без критических точек, каждая поверхность уровня которой имеет одну компоненту связности. Тогда поверхности уровня *f* является некомпактными под многообразиями.

Замечание 1. В условиях теоремы многообразие *M* должно быть некомпактным, так как функция *f* не имеет критических точек.

Замечание 2. Всюду в работе мы рассматриваем непостоянные функции. Для постоянной функции длина градиентного вектора равна нулю, т.е. все точки являются критическими точками. В этом случае все поверхности уровня совпадают многообразием *M.*

Доказательство. Покажем, что функция *f* не имеет компактной «поверхности» уровня. Предположим обратное. Пусть $p_0\in M\,,\,f(p_0)=c_0$ и поверхность уровня $L_0=\{p\epsilon M:f(p)=c_0\}$ является компактным подмножеством.

Пусть *d(p,q)*- расстояние между точками *p,q* многообразия *M*, определенное римановой метрикой. В силу того, что *M*- полно, существует геодезическая γ, соединяющая точки *p* и *q*, длина которой равна *d(p,q).* [5,ñ.167]. Так как множество L_0 компактно, а *M* полно, существует шар $B_R(p_0)$ такой, что $L_0\subset B_R(p_0)$. В работе [3] доказано, что L_0 делит *M* на две части: $M_+=\{p\epsilon M:f(p)>c_0\}$, $M_-=\{p\epsilon M:f(p)<c_0\}$, причем обе части линейно связны.

Докажем, что $\partial B_R(\rho)=S_R(p_0)=\{p\epsilon M:d(p_0,p)=R\}$ лежит либо в M_+ либо в M_-. Сначала докажем, что $S_R(p_0)$ является линейно связным множеством. Для этого рассмотрим экспоненциальное отображение $\exp_{p_0}:T_{p_0}M\to M$, которое определяется следующим образом: для каждого вектора $\nu \in T_{p_0}M$ в направлении вектора ν из точки ρ_0 выпускаем геодезическую линию $\gamma(s,p_0)$ такую, что $\gamma(0,p_0)=p_0$, $\dot{\gamma}(0,p_0)=\nu$. Тогда $\exp_{p_0}(\nu)=\gamma(1,p_0)$. В общем случае экспоненциальное отображение $\exp_{p_0}$ определено в некоторой окрестности нулевого вектора из $T_{p_0}M$ [4,с.144]. Для полных римановых многообразий $\exp_{p_0}$ определено в некоторой окрестности нулевого вектора из $T_{p_0}M$ [4,с.144]. Для полных римановых многообразий $\exp_{p_0}$ определено на всем $T_{p_0}M$. Известно, что экспоненциальное отображения является дифференцируемым отображением [5,с.144]. Кроме того, существует такое $\varepsilon>0$, что $\exp_{p_0}:V\varepsilon \to \exp_{p_0}(V\varepsilon)$ является диффеоморфизмом, где $V_\varepsilon=\{\nu \in T_{p_0}M;|\nu|\prec\varepsilon\}$. Если $\exp_{p_0}:T_{p_0}M\to M$ является диффеоморфизмом, то M диффеоморфно R^n. Для каждой точки $p\epsilon S_R(p_0)$ существует геодезическая $\gamma(s,p_0)$, которая реализует расстояние $d(p_0,p)$, т.е. $p=\exp_{p_0}(\nu)$, где $\nu\in T_{p_0}M$, $|\nu|=R$. Отсюда следует, что $S_R(p_0)=\exp_{p_0}(S_R)$, где $S_R=\{\nu:\nu\in T_{p_0}M,|\nu|=R\}$. Так как касательное пространство $T_{p_0}M$ изоморфно R^n как линейное пространство, сфера S_R является линейно связным множеством. Поэтому «сфера» $S_R(p_0)$, как образ линейно связного множества S_R при непрерывном отображении, является линейно связной.

Пусть $p_0\epsilon L_0$, $\gamma(s,p_0)$- градиентная линия, выходящая из точки p_0 при $s=0$ и параметризованная длиной дуги. В силу того, что М полно, $\gamma(s,p_0)$ определена для всех $s\epsilon R=(+\infty;-\infty)$ [5,с.167].

Предположим, что $p=\gamma(s_0,p_0)\epsilon S_R(p_0)$ при некотором $s_0\epsilon R$. Не ограничивая общности предположим, что $s_0>0$. Это означает, что $p=\gamma(s_0,p_0)\epsilon M_+\cap S_R(p_0)$.

Покажем, что $\gamma(s,p_0)\epsilon B_R(p_0)$ при любом $s<0$. Предположим обратное. Пусть существует $s_1<0$ такое, что $\gamma(s_1,p_0)\in S_R(p_o)$. Тогда в силу линейной связности $S_R(p_0)$ существует кусочно-гладкая кривая $\varphi:[0,1]\to S_R(p_0)$ такая, что $\varphi(0)=p=\gamma(s_0,p_0)$, $\varphi(1)=\gamma(s_1,p_0)$.

Рассмотрим путь ψ, которой определяется следующим образом:
Выходим из точки p в точку $p_1=\gamma(s,p_0)$ по кривой φ, затем по градиентной линии γ приходим в точку p. Параметризация пути ψ определяется следующим образом:

$$\psi(s)=\begin{cases}\varphi(2s), & \text{åñëè} \quad s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \gamma((s_0+s_1)(2s-1)-s_1), & \text{åñëè} \quad s\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\psi(0)=\psi(1)=p$.

Теперь рассмотрим путь (петлю) ψ' с началом и концом в точке p и непересекающийся с L_0. В силу того, что M односвязно, пути ψ и ψ' гомотопны. Поэтому у них индексы пересечения с L_0 равны .[6,с.523]. (Напомним понятие индекса пересечения трансверсальных подмногообразий.)

Пусть P,Q– два подмногообразия (без края) многообразия M размерности k и $n–k$ соответственно, где $1\le\kappa\le n-1$. Подмногообразия P и Q называются трансверсально пересекающимися, если в любой точке $x\epsilon P\cap Q$ касательное пространства T_xP и T_xQ линейно порождают касательное пространства T_xM многообразия M в точке x, т.е. $T_xM=T_xP+T_xQ$.

В случае, когда пересечение P и Q состоит из конечного числа точек, определяется индекс пересечения этих подмногообразий. Напомним это понятие. В силу того, что многообразие M односвязно, оно ориентируемо [5,стр. 239]. Если многообразия P и Q ориентируемы, то каждой точке $x\epsilon P\cap Q$ приписывается +1 или -1 по следующему правилу: пусть $\tau_x=\{\tau_x^1,\tau_x^2,\dots,\tau_x^k\}$ - ориентирующий базис многообразия P в точке x, $\nu_x=\{\nu_x^1,\nu_x^2,\dots,\nu_x^{n-k}\}$- ориентирующий базис многообразия Q в точке x.
Если семейство $\{\tau_x^1,\tau_x^2,\dots,\tau_x^k,\nu_x^1,\nu_x^2,\dots,\nu_x^{n-k}\}$ является ориентирующим базисом касательного пространства T_xM , точке x приписываем +1, в противном случае приписываем -1. Это число обозначим через $\varepsilon(x)$. Если $x_1,x_2,\dots,x_m$– точки пересечения P и Q, то сумма $\sum_{j=1}^m\varepsilon(x_j)$ называется индексом пересечения P и Q. Если подмногообразия P и Q не пересекаются, то их индекс пересечения по определению равен нулю [6, с.522]

С одной стороны путь ψ' не пересекается с L_0 поэтому его индекс пересечения с L_0 равен нулю. С другой стороны, путь ψ пересекается с L_0 в одной точке, поэтому его индекс равняется ± 1. Это противоречие показывает, что точки $\gamma(s,p_0)$ при $s \leq 0$ должны лежать в $B_R(p_0)$. Так как $B_R(p_0)$ компактно, существует последовательность $0>s_1>s_2>s_3>\ldots$ такая, что $\gamma(s_k,p_0)$ сходится к некоторой точке q_0. Тогда точка p_0 является особой точкой для градиентного поля *gradf,* т.е. критической точкой для функции f [7,стр.27] . Это противоречие показывает, что f не имеет компактных поверхностей уровня. Теорема доказана.

Литература:

1. Tondeur Ph. Foliation on Riemannian manifold //Springer-Verlag, 1988.
2. Нарманов А., Шарапов С. О поверхностях уровня субмерсий. //Узбекский математический журнал. – Ташкент. 2004.-№2.-С.62-66.
3. Нарманов А., Бойтураев А. Об одном классе субмерсий //Узбекский математический журнал.- Ташкент.2003.-№2.-С.29-36.
4. Каипназарова Г., Нарманов А.Я. Топология слоений, порожденных поверхностями уровня. //Узбекский математический журнал.- Ташкент,2008,-№2,-С.53-60.
5. Кобаяси Ш, Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. В 2-х т. М.: Наука, 1981.Т.1.-344с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. -М.: Наука, 1979.-760 с.
7. Палис Ж., Ди Мелу. В. Геометрическая теория динамических систем. М.:Мир, 1986.-301с